Uitwerkingen Hoofdstuk K Voortgezette integraalrekening

1. Gegeven : $f(x) = \sin\left(x^2 + x\right)$

a. $f'(x) = \cos(x^2 + x).[x^2 + x]' = (2x+1).\cos(x^2 + x)$

b. Differentiëren van functie G levert functie g op. Zie het vorige antwoord.

2.

a. De afgeleide van $x^2 + 1$ staat afgezien van een constante factor wel voor de haakjes.
De afgeleide van $x^3 + 1$ levert een term met x^2 op, maar die staat niet voor de haakjes.

b. De afgeleide van $x^4 + 7$ staat afgezien van een factor wel in de teller.
$[x^4 + x]' = 4x^3 + 1$, maar het getal 1 staat niet in de teller van de breuk.

c) $[x^4 + x]' = 4x^3 + 1$ en de teller van de breuk is te schrijven als $2\frac{1}{2}\left(4x^3 + \frac{2}{5}a\right)$

Kies daarom a zodanig dat $\frac{2}{5}a = 1$ ofwel $a = 2\frac{1}{2}$.

3.

a. $\int \sqrt{4x-1}dx$ Stel $4x - 1 = u \Rightarrow$ d$(4x - 1) =$ du $\Rightarrow$ $4dx =$ d$u \Rightarrow dx = \frac{1}{4}du$

$$\int \sqrt{4x-1}dx = \int \frac{1}{4}\sqrt{u}.du = \int \frac{1}{4}u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{12}u^{1\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{6}u\sqrt{u} + C = \frac{1}{6}\left(4x+1\right)\sqrt{4x+1} + C$$

b. Maakt in dit geval nog niet veel uit.

4.

a. Stel $x^2 + 4 = t$ dus $2x \cdot dx = dt$ dus $\int 2x(x^2+4)^3 dx = \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}(x^2+4)^4 + C$.

b. Stel $x^2 + 1 = t$ dus $2x \cdot dx = dt$ dus
$\int 6x\sqrt{x^2+1}dx = \int 3\sqrt{t}dt = 2t\sqrt{t} + C = 2(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C$

c. Stel $x^3 - 1 = t$ dus $3x^2 \cdot dx = dt \Rightarrow 6x^2\, dx = 2dt \Rightarrow$
$\int 6x^2.\left(x^3-1\right)^4 dx = \int 2t^4 dt = \frac{2}{5}t^5 + C = \frac{2}{5}(x^3-1)^5 + C$

d. Stel $x^3 - 1 = t$ dus $3x^2 \cdot dx = dt \Rightarrow$
$\int 3x^2.\sin\left(x^3-1\right)dx = \int \sin(t)dt = -\cos(t) + C = -\cos(x^3-1) + C$

5

a. Stel $3x-4=t$ dus $dx=\frac{1}{3}dt$ dus $\int(3x-4)^3dx=\int\frac{1}{3}t^3dt=\frac{1}{12}t^4+C=\frac{1}{12}(3x-4)^4+C$

b. Stel $2x-3=t$ zodat $dx=\frac{1}{2}dt \Rightarrow$

$\int(2x-3)^{1,5}dx=\int\frac{1}{2}t^{1,5}dt=\frac{1}{5}t^{2,5}+C=\frac{1}{5}(2x-3)^2\sqrt{(2x-3)}+C$.

c. Stel $1-x=t$ dus $dx=-dt$ dus $\int\frac{2}{\sqrt{1-x}}dx=\int\frac{-2}{\sqrt{t}}dt=-4\sqrt{t}+C=-4\sqrt{1-x}+C$

d. Stel $2-3x^2=t$ dus $-6x\cdot dx=dt$ dus $2x\cdot dx=-\frac{1}{3}dt$. De berekening wordt dan:

$$\int\frac{2x}{2-3x^2}dx=\int\frac{-\frac{1}{3}}{t}dt=-\frac{1}{3}\ln|t|+C=-\frac{1}{3}\ln|2-3x^2|+C$$

e. Stel $4x+1=t$ en dus $dx=\frac{1}{4}\cdot dt \Rightarrow$

$\int\ln(4x+1)dx=\int\frac{1}{4}\ln(t)dt=\frac{1}{4}(t\cdot\ln(t)-t)+C=\frac{1}{4}((4x+1)\cdot\ln(4x+1)-(4x+1))+C$

f. Stel $x^2+1=t$ en dus $2x\cdot dx=dt$, waarmee de integraal overgaat in

$\int\frac{1}{2}\ln(t)dt=\frac{1}{2}(t\cdot\ln(t)-t)+C=\frac{1}{2}((x^2+1)\cdot\ln(x^2+1)-(x^2+1))+C$

6.

a. Stel $\ln(x)=t$ dus $\frac{1}{x}\cdot x=dt \Rightarrow \int\frac{\ln(x)}{x}dx=\int tdt=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}(\ln(x))^2+C=\frac{1}{2}\ln^2(x)+C$

b. Stel $-x^2=t$ dus $x\cdot dx=-\frac{1}{2}dt \Rightarrow \int xe^{-x^2}dx=\int-\frac{1}{2}e^tdt=-\frac{1}{2}e^t+C=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$

c. Stel $5-x^2=t \Rightarrow -2xdx=dt \Rightarrow xdx=-\frac{1}{2}dt \Rightarrow$

$\int x\sqrt{5-x^2}dx=\int-\frac{1}{2}\sqrt{t}dt=\int-\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{3}t^{1\frac{1}{2}}+C=-\frac{1}{3}(5-x^2)\sqrt{5-x^2}+C$

d. Stel $x^2+1=t$ en dus $2x\cdot dx=dt \Rightarrow x.dx=\frac{1}{2}dt$. Daarmee gaat de integraal over in

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{t}}dt=\int\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\sqrt{t}+C=\sqrt{x^2+1}+C .$$

7. $[\ln(\cos(x))]'=\frac{1}{\cos(x)}\cdot-\sin(x)=-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=-\tan(x)$

8

a. $\int_0^{\pi/6} \tan(2x)dx = \left[-\frac{1}{2}\ln|\cos(2x)\right]_0^{\pi/6} = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln(1) = \frac{1}{2}\ln(2)$

b. $I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin^3(x)dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin(x)\cdot\left(1-\cos^2(x)\right)dx = \int_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}} -(1-t^2)dt$ waarbij $\cos(x) = t$ is gesteld

en dus ook geldt : -sin(x).dx = dt

Merk op dat de grenzen van de variabele *x* zijn gewijzigd in de grenzen van de variabele *t*.

Je krijgt nu verder $I = \left[\frac{1}{3}t^3 - t\right]_{0,5\sqrt{2}}^{0,5} = \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -\frac{11}{24} + \frac{5}{12}\sqrt{2}$

c. Met $\sin(x) = t$ en dus cos(x) dx = dt krijgen we :

$I = \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2(x).\cos(x)dx = \int_{0,5}^{1} t^2 dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_{0,5}^{1} = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{7}{24}$

d. Gebruik eerst de formule $\sin(2x) = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$ waarna je krijgt

$I = \int_0^{\frac{1}{6}\pi} \sin(2x).\cos(x)dx = \int_0^{\pi/6} 2\cdot\sin(x)\cdot\cos^2(x)dx$

Met $\cos(x) = t$ en dus –sin(x)dx = dt en aanpassing van de grenzen krijg je nu :

$I = \int_1^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} -2t^2 dt = \left[-\frac{2}{3}t^3\right]_1^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}\sqrt{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{4}\sqrt{3}$

e. Stel $3x + 1 = t \Rightarrow 3dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{3}dt$ De integraal gaat dan over in :

$\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{3x+1}}dx = \int_1^4 \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{t}}dt = \left[\frac{4}{3}\sqrt{t}\right]_1^4 = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$

f. Stel $x^2 + 1 = t \Rightarrow 2x\text{d}x = dt \Rightarrow x\text{d}x = \frac{1}{2}dt \Rightarrow$ Met aanpassing van de grenzen :

$\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx = \int_1^2 \frac{0,5}{t}dt = \left[\frac{1}{2}\ln|t|\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln(2)$

g. Stel $x^2 + 1 = t \Rightarrow 2dx = dt \Rightarrow dx = 0{,}5dt \Rightarrow$ met aanpassing van de grenzen :

$\int_0^{2\sqrt{2}} x\sqrt{x^2+1}.dx = \int_1^9 0,5\sqrt{t}.dt = \int_1^9 0,5t^{\frac{1}{2}}dt = \left[\frac{1}{3}t^{1\frac{1}{2}}\right]_1^9 = \left[\frac{1}{3}t\sqrt{t}\right]_1^9 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}$

h. Stel $\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2dt \Rightarrow$

$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int_1^2 2e^t dt = \left[2e^t\right]_1^2 = 2e^2 - 2e$

i. Stel $x^2+1=t$ en dus $2xdx=dt \Rightarrow x\cdot dx=\frac{1}{2}dt \Rightarrow$ met aanpassing van de grenzen :

$$\int_1^2 x.\ln(x^2+1)dx=\int_2^5 \frac{1}{2}\ln(t)dt=\left[\frac{1}{2}\cdot(t\cdot\ln(t)-t)\right]_2^5=\frac{1}{2}\cdot(5\ln(5)-5)-\frac{1}{2}\cdot(2\ln(2)-2)=2\tfrac{1}{2}\ln(5)-\ln(2)-1\tfrac{1}{2}$$

9.

a. Stel $\ln(x)=t$ zodat $\frac{1}{x}dx=dt$. $\Rightarrow \int_1^2 \frac{\ln^2(x)}{x}dx=\int_0^{\ln(2)} t^2dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\ln(2)}=\frac{1}{3}\ln^3(2)$

b. Stel $\ln(x)=t \Rightarrow \frac{1}{x}dx=dt \Rightarrow \int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln(x)}dx=\int_1^2\frac{1}{t}dt=\left[\ln(t)\right]_1^2=\ln(2)-\ln(1)=\ln(2)$

c. Stel $2x^3=t$ en dus $6x^2dx=dt \Leftrightarrow x^2dx=\frac{1}{6}dt \Rightarrow$

$$\int_0^1\frac{x^2}{e^{2x^3}}dx=\int_0^2\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{e^t}dt=\int_0^2\frac{1}{6}\cdot e^{-t}dt=\left[-\frac{1}{6}e^{-t}\right]_0^2=-\frac{1}{6e^2}+\frac{1}{6}$$

10

a. Via de formule $\cos(2x)=1-2\sin^2(x)$ en het stellen van $\sin(x)=t$ en dus $\cos(x)dx=dt$

krijgen we : $\int\cos(2x).\cos(x)dx=\int(1-2t^2)dt=t-\frac{2}{3}t^3+C=\sin(x)-\frac{2}{3}\sin^3(x)+C$

b. $I=\int\sin^5(x)dx=\int\sin^2(x)\cdot\sin^2(x)\cdot\sin(x)dx=\int(1-\cos^2(x))^2\cdot\sin(x)dx$

Stel nu $\cos(x)=t \Rightarrow$ -sin(x)dx = $dt \Rightarrow$

$I=\int(1-t^2)^2\cdot -dt=\int-(t^2-1)^2dt=\int(-t^4+2t^2-1)dt=$

$-\frac{1}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3-t+C=-\frac{1}{5}\cos^5(x)+\frac{2}{3}\cos^3(x)-\cos(x)+C$

11 Gegeven : $f(x)=\dfrac{2+\ln(x)}{x}$

a) $Opp.(V)=\int_{e^{-2}}^{e}\frac{2+\ln(x)}{x}dx=\int_1^3 t\cdot dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^3=4\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=4$ waarbij $2+\ln(x)=t$ is gesteld en

dus $\frac{1}{x}dx=dt$ en natuurlijk aanpassing van de grenzen.

b. Uit onderdeel a volgt direct: $\int_1^p f(x)dx=\frac{1}{2}(2+\ln(x))^2\Big]_1^p=\frac{1}{2}(2+\ln(p))^2-2=6 \Leftrightarrow$

$(2+\ln(p))^2=16 \Leftrightarrow 2+\ln(p)=-4 \vee 2+\ln(p)=4 \Leftrightarrow \ln(p)=-6 \vee \ln(p)=2$.

Hieruit volgen de oplossingen $p=e^{-6}$ en $p=e^2$. De oplossing $p=e^{-6}$ vervalt want $p>1$.

12 Gegeven : $f(x)=\dfrac{4\ln^2(x)}{x}$ en $g(x)=\dfrac{1}{x}$

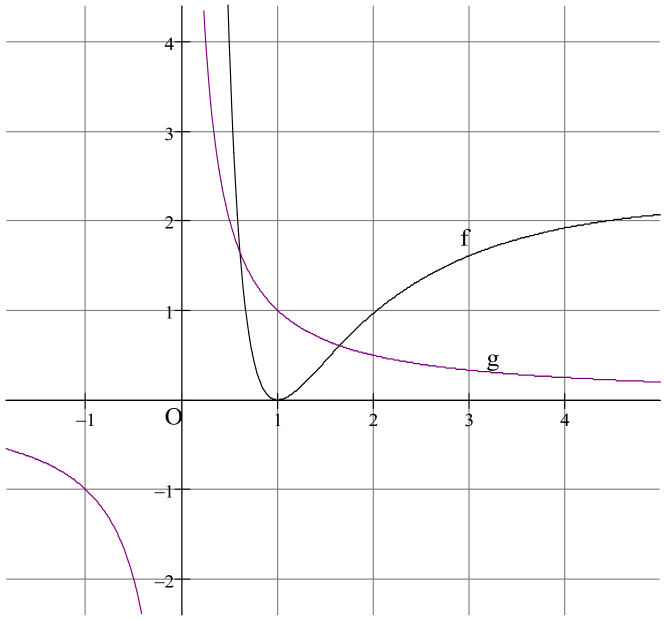
a) Eerst de vergelijking oplossen : $\Rightarrow$

$$\frac{4\ln^2(x)}{x}=\frac{1}{x}\Rightarrow 4\ln^2(x)=1\Leftrightarrow \ln^2(x)=\tfrac{1}{4}\Leftrightarrow \ln(x)=\tfrac{1}{2}\vee \ln(x)=-\tfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\sqrt{e}\vee x=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Nu de schets van beide grafieken $\Rightarrow$

Nu volgt uit deze schets dat voor de oplossing geldt :

$$\frac{1}{\sqrt{e}}\le x\le\sqrt{e}$$



b. $$Opp.(V)=\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{x}-\frac{4\ln^2(x)}{x}\right)dx=\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}}\frac{1-4\ln^2(x)}{x}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(1-4t^2)dt=$$

$$\left[t-\frac{4}{3}t^3\right]_{-0,5}^{0,5}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{3}$$ Hierbij is gebruik gemaakt van de substitutie

$\ln(x)=t$ en dus geldt dan ook $\dfrac{1}{x}dx=dt$

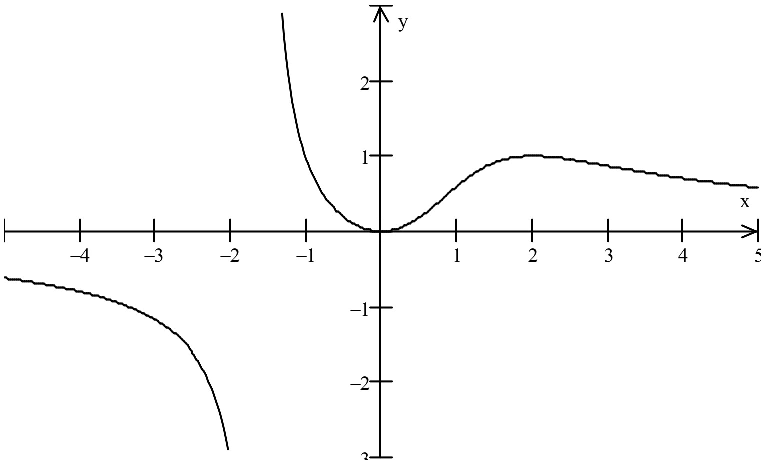
13 Gegeven : $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^3+4}$

a. We moeten het verloop van de grafiek bekijken. We hebben dan dus de extreme waarden nodig $\Rightarrow$

$$f'(x)=\frac{(x^3+4)\cdot 6x-3x^2\cdot 3x^2}{(x^3+4)^2}=\frac{24x-3x^4}{(x^3+4)^2}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=0 \text{ geeft } x=0 \text{ en } x=2\,.$$

De grafiek laat zien dat $\min.=f(0)=0$ en $\max.=f(2)=1$.

Een horizontale lijn met vergelijking $y=p$ snijdt de grafiek drie keer als $0<p<1$.



b. Stel $x^3+4=t$ en dus $3x^2\,dx=dt \Rightarrow$

$$\int_0^p \frac{3x^2}{x^3+4}dx=\int_4^{p^3+4}\frac{1}{t}dt=\ln(p^3+4)-\ln(4)=\ln(\frac{p^3+4}{4})=2$$

$$\frac{p^3+4}{4}=e^2 \Leftrightarrow p^3+4=4e^2 \Leftrightarrow p^3=4e^2-4 \Leftrightarrow p=\sqrt[3]{4e^2-4}$$

14

a. Dit volgt direct uit $df(x)=f'(x)dx$ en $dg(x)=g'(x)dx$

b. In de voorgaande regel is de term $f(x)dg(x)$ naar links gebracht.

c. $\ln(x)d\,\frac{1}{2}x^2=d\,\frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{1}{2}x^2d\ln(x) \Leftrightarrow d\,\frac{1}{2}x^2\ln(x)=\ln(x)d\,\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2d\ln(x)$ hier staat de bekende productregel van het differentiëren. Het klopt dus.

d.

$$\ln(x)d\,\frac{1}{2}x^2=d\,\frac{1}{2}x^2\ln(x)-\tfrac{1}{2}xdx \Leftrightarrow d\,\frac{1}{2}x^2\ln(x)=\ln(x).d\,\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2.d\ln(x)$$

$$\Leftrightarrow d\,\frac{1}{2}x^2\ln(x)=\ln(x).d\,\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2.\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \ln(x)d\,\frac{1}{2}x^2=d\,\frac{1}{2}x^2\ln(x)-\tfrac{1}{2}xdx$$

e. $d\left(\frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{1}{4}x^2\right)=x.\ln(x)dx+\frac{1}{2}x^2.\frac{1}{x}dx-\tfrac{1}{2}xdx=x.\ln(x)dx=\ln(x).d\,\frac{1}{2}x^2$

f. $H'(x)=x\cdot\ln(x)+\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{2}x=x\cdot\ln(x)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x=x\cdot\ln(x)$

> De steeds gebruikte formule voor partieel integreren is: $\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$

15 $\int x\sin(x)dx=\int\sin(x)d(\frac{1}{2}x^2)=\frac{1}{2}x^2\cdot\sin(x)-\int\frac{1}{2}x^2d(\sin(x)=\frac{1}{2}x^2\cdot\sin(x)-\int\frac{1}{2}x^2\cdot\cos(x)dx$

maar die laatste integraal is ingewikkelder dan de integraal waarmee we begonnen. Deze aanpak lijkt dan ook niet goed te werken.

16

a. $\int xe^{2x}dx = \int \frac{1}{2}xd(e^{2x}) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int e^{2x}d(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$ +C

b. $\int 2x\cos(x)dx = \int 2xd(\sin(x)) = 2x\sin(x) - \int \sin(x)d(2x) = 2x\sin(x) - \int 2\sin(x)dx = 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C$

c. $\int x\ln^3(x)dx = \int \ln^3(x)d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}x^2\ln^3(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot 3\ln^2(x)\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2\ln^3(x) - \frac{3}{2}\int x\ln^2(x)dx$

Merk op dat de macht van de factor $\ln(x)$ in de laatste integraal gedaald is tot 2.
Ook deze integraal laat zich met partiële integratie bepalen.

$$\int x\ln^2(x)dx = \int \ln^2(x)d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}x^2\ln^2(x) - \int \frac{1}{2}x^2 d(\ln^2(x)) = \frac{1}{2}x^2\ln^2(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln^2(x) - \int x\ln(x)dx = \frac{1}{2}x^2\ln^2(x) - \left(\frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2\right) + C$$

Opm. het resultaat van de laatste integraal is overgenomen uit het voorbeeld op blz. 124.
Het eindresultaat wordt dan:

$$\int x\ln^3(x)dx = \frac{1}{2}x^2\ln^3(x) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\ln^2(x) - \left(\frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2\right)\right) + C = \frac{1}{2}x^2\ln^3(x) - \frac{3}{4}x^2\ln^2(x) + \frac{3}{4}x^2\ln(x) - \frac{3}{8}x^2 + C$$

d. $I = \int x^3\ln(x)dx =$ Andere manier : Stel $\begin{array}{l} f(x) = \ln(x) \text{ en } g'(x) = x^3 \Rightarrow \\ f'(x) = \frac{1}{x} \text{ en g(x)=}\frac{1}{4}x^4 \end{array} \Rightarrow$

$I = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx \Rightarrow$

$I = \frac{1}{4}x^4.\ln(x) - \int \frac{1}{4}x^3dx = \frac{1}{4}x^4.\ln(x) - \frac{1}{16}x^4 + C$

17.

a. $\int_0^1 2x(e^x+1)dx = \int_0^1 2xd(e^x+x) = \left[2x(e^x+x)\right]_0^1 - \int_0^1 (e^x+x)\cdot 2dx =$

$2(e+1) - \left[2e^x + x^2\right]_0^1 = (2e+2) - (2e+1-2) = 3$

b. $\int_0^\pi (3x+1)\sin(x)dx = \int_0^\pi (3x+1)d(-\cos(x)) = \left[(-3x-1)\cos(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x)d(3x+1) =$

$3\pi + 2 + \int_0^\pi 3\cos(x)dx = 3\pi + 2 + \left[3\sin(x)\right]_0^\pi = 3\pi + 2$

18. $\int \ln(x)dx = \int \ln(x)d(1\cdot x) = (1\cdot x)\ln(x) - \int xd(\ln(x)) = x\ln(x) - \int dx = x\ln|x| - x + C$

19 Gegeven : $f(x) = x^2.\ln(x)$

a) $f'(x) = 2x\ln(x) + x^2\cdot\frac{1}{x} = 2x\ln(x) + x = x(2\ln(x)+1).$

$f'(x)=0$ geeft $\ln(x)=-\frac{1}{2}$ ofwel als $x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

De coördinaten van de top A zijn daarom $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{e}},-\frac{1}{2e}\right)$

b. Omdat door de aanwezigheid van de factor $\ln(x)$ de variabele x positief moet zijn, is het vlakdeel dat gelegen is tussen $x = 0$ en $x = 1$ en de x-as *niet* afgesloten! Vandaar:

$$\int_1^e x^2\ln(x)dx=\int_1^e \ln(x)d\left(\frac{1}{3}x^3\right)=\left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{3}x^3d\ln(x)=.$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{3}x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_1^e-\left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^e=$$

$$\frac{1}{3}e^3-\left(\frac{1}{9}e^3-\frac{1}{9}\right)=\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}$$

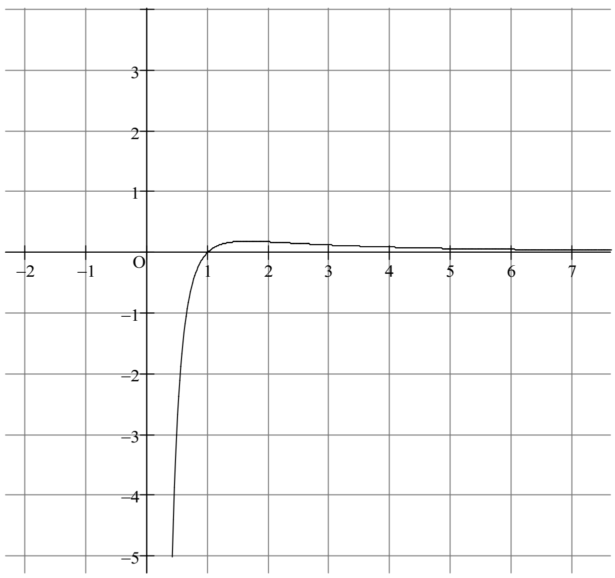
20 Gegeven : $f(x)=\frac{\ln(x)}{x^2}$

a. $f'(x)=\dfrac{x^2.\frac{1}{x}-\ln(x)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{1-2\ln(x)}{x^3} \Rightarrow$

$f'(x) = 0$ geeft $x=\sqrt{e}$.

Een schets van de grafiek laat zien dat $f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$ het maximum is, vandaar

$B_f =\langle\leftarrow,\frac{1}{2e}]$



b. De x-as wordt gesneden bij $x = 1$, vandaar dat je $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}dx$ moet berekenen.

$$\int_1^e\frac{\ln(x)}{x^2}dx=\int_1^e\ln(x)d(-x^{-1})=-\left[\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e-\int_1^e-\frac{1}{x}.d\left(\ln x\right)=-\left[\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e+\int_1^e\frac{1}{x^2}.dx=$$

$$-\left[\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e=-\frac{1}{e}+\left(-\frac{1}{e}\right)+1=1-\frac{2}{e}$$

21. Gegeven: $f(x) = x^2.e^x$

a. $d(x^2e^x) - 2xe^x dx = (2xe^x + x^2e^x)dx - 2xe^x dx = x^2e^x dx$ en dit is inderdaad hetgeen links staat.

b. $d(2xe^x - 2e^x) = (2e^x + 2xe^x - 2e^x)dx = 2xe^x dx$ en dit is weer precies hetgeen dat links staat.

c. De resultaten van de twee vorige vragen worden hier 'aan elkaar geplakt'.
Controle :
$$F(x) = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x + C \Rightarrow F'(x) = \left(2x - 2\right)e^x + \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x = x^2.e^x = f(x)$$

22. $\int e^x \sin(x)dx = \int \sin(x)d(e^x) = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)dx = e^x \sin(x) - \int \cos(x)d(e^x) =$
$e^x \sin(x) - \left(e^x \cos(x) - \int e^x \cdot (-\sin(x))\,dx\right) = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x)dx$
Merk op dat je nu weer bent uitgekomen op de integraal waarmee je begon!!
$\int e^x \sin(x)dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x)dx \Leftrightarrow$
$$2 \cdot \int e^x \sin(x)dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) \;\Rightarrow\; \int e^x \sin(x)dx = \frac{1}{2}e^x \sin(x) - \frac{1}{2}e^x \cos(x) + C$$

23

a. $\int \frac{1}{4}x^2 \cos(x)dx = \int \frac{1}{4}x^2 d(\sin(x)) = \frac{1}{4}x^2 \sin(x) - \int \sin(x) \cdot \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{4}x^2 \sin(x) - \int \frac{1}{2}x d(-\cos(x)) =$
$$\frac{1}{4}x^2 \sin(x) - \left(-\frac{1}{2}x\cos(x) - \int -\cos(x) \cdot \frac{1}{2}dx\right) = \frac{1}{4}x^2 \sin(x) + \frac{1}{2}x\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) + C$$

b. $I = \int e^{-x} \cos(x)dx = \int e^{-x} d(\sin(x)) = e^{-x} \sin(x) - \int -e^{-x} \sin(x)dx = e^{-x} \sin(x) + \int e^{-x} d(-\cos(x)) =$

$e^{-x} \sin(x) + \left(e^{-x} \cdot -\cos(x) - \int -\cos(x) \cdot -e^{-x}dx\right) = e^{-x} \sin(x) - e^{-x} \cos(x) - \int e^{-x} \cos(x)dx$
$I = e^{-x} \sin(x) - e^{-x} \cos(x) - I \Rightarrow 2I = e^{-x} \sin(x) - e^{-x} \cos(x)$
Je hebt nu de integraal waarmee je begon weer terug gekregen. Vandaar:
zodat $I = \int e^{-x} \cos(x)dx = \frac{1}{2}e^{-x} \sin(x) - \frac{1}{2}e^{-x} \cos(x) + C$

c. $I = \int e^{2x} d(-\cos(x)) = -e^{2x} \cos(x) - \int -\cos(x) d(e^{2x}) = -e^{2x} \cos(x) + \int 2e^{2x} \cos(x)dx =$

$-e^{2x} \cos(x) + \int 2e^{2x} d(\sin(x)) = -e^{2x} \cos(x) + 2e^{2x} \sin(x) - \int \sin(x) d(2e^{2x}) =$
$-e^{2x} \cos(x) + 2e^{2x} \sin(x) - \int 4e^{2x} \sin(x)dx$ waarmee we weer op de beginintegraal uitkomen.
$$\Rightarrow I = -e^{2x} \cos(x) + 2e^{2x} \sin(x) - 4I \Leftrightarrow 5I = -e^{2x} \cos(x) + 2e^{2x} \sin(x)$$
$I = \int e^{2x} \sin(x)dx = -\frac{1}{5}e^{2x} \cos(x) + \frac{2}{5}e^{2x} \sin(x) + C$

24

a. $I=\int_1^3 (x^2-x)d(e^x)=\Big[(x^2-x)e^x\Big]_1^3-\int_1^3 e^x d(x^2-x)=6e^3-\int_1^3(2x-1).e^x dx=$

$6e^3-\int_1^3(2x-1)d\left(e^x\right)=6e^3-\left(\Big[(2x-1)e^x\Big]_1^3-\int_1^3 e^x\cdot 2dx\right)=6e^3-5e^3+e+\Big[2e^x\Big]_1^3=$

$e^3+e+2e^3-2e=3e^3-e$

b) $I=\int_1^e \ln^2(x)d\left(\frac{1}{2}x^2\right)=\left[\frac{1}{2}x^2\ln^2(x)\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{2}x^2\cdot d\left(\ln^2(x)\right)=\frac{1}{2}e^2-\int_1^e\frac{1}{2}x^2.2\ln(x).\frac{1}{x}dx=$

$\frac{1}{2}e^2-\int_1^e x\ln(x)dx=\frac{1}{2}e^2-\int_1^e\ln(x)d\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)=\frac{1}{2}e^2-\left(\left[\tfrac{1}{2}x^2.\ln(x)\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{2}x^2 d\left(\ln x\right)\right)=$

$\frac{1}{2}e^2-\left(\frac{1}{2}e^2-0\right)+\int_1^e\frac{1}{2}x^2.\frac{1}{x}dx=\int_1^e\tfrac{1}{2}xdx=\left[\tfrac{1}{4}x^2\right]_1^e=\tfrac{1}{4}e^2-\tfrac{1}{4}$

25 Gegeven : $f(x)=\left(2x^2+x-1\right)e^x$

a. Extreme waarden $\Rightarrow$ $f'(x)=(4x+1)e^x+(2x^2+x-1)e^x=(2x^2+5x)e^x \Rightarrow$

$f'(x)=0$ geeft : $x=0$ en $x=-2\frac{1}{2}$.

Uit de bijgetekende grafiek blijkt dat $\max.=f(-2{,}5)=9e^{-2{,}5}$ en $\min.=f(0)=-1$

b. Snijpunt x-as als $f(x)=0 \Rightarrow 2x^2+x-1=0 \Rightarrow$ De abc-formule geeft $x=-1$ en $x=\frac{1}{2}\Rightarrow$

De grafiek snijdt de x-as in de punten $(-1{,}0)$ en $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

Het vlakdeel bevindt zich onder de x-as, zodat we de integraal $\int_{-1}^{0{,}5}-f(x)dx$ moeten berekenen.$\Rightarrow$

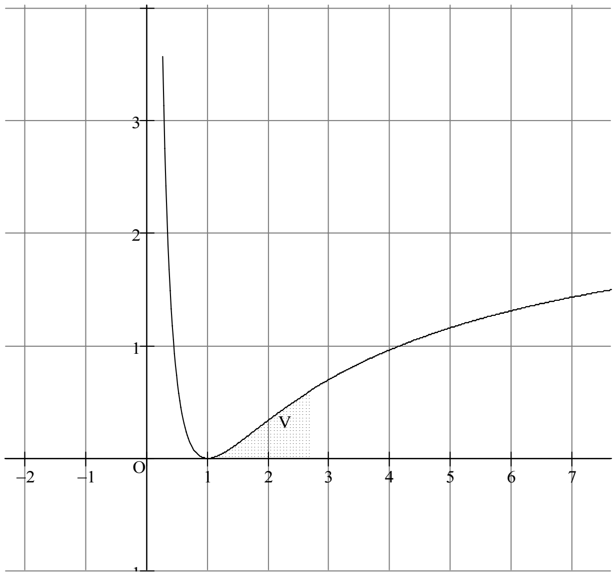
$O(V)=\int_{-1}^{0{,}5}(-2x^2-x+1)e^x dx=\int_{-1}^{0{,}5}(-2x^2-x+1)de^x=$

$\Big[(-2x^2-x+1)e^x\Big]_{-1}^{0{,}5}-\int_{-1}^{0{,}5}e^x d(-2x^2-x+1)=0-\int_{-1}^{0{,}5}(-4x-1)e^x dx=$

$\int_{-1}^{0{,}5}(4x+1)d(e^x)=\Big[(4x+1)e^x\Big]_{-1}^{0{,}5}-\int_{-1}^{0{,}5}e^x d(4x+1)=\Big[(4x+1)e^x\Big]_{-1}^{0{,}5}-\int_{-1}^{0{,}5}4e^x d(x)$

$(3e^{0{,}5}+3e^{-1})-\Big[4e^x\Big]_{-1}^{0{,}5}=3\sqrt{e}+\frac{3}{e}-4\sqrt{e}+\frac{4}{e}=\frac{7}{e}-\sqrt{e}$

26. Gegeven : $f(x) = \dfrac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}$



a. Snijpunt met de x-as $\Rightarrow$ $f(x) = 0$ $\Rightarrow$ $\ln(x) = 0 \Rightarrow$ $x = 1$ en de grafiek ligt uiteraard verder geheel boven de x-as.
We bepalen eerst de zogeheten onbepaalde integraal:

$$I = \int \ln^2(x) d(2\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}\cdot\ln^2(x) - \int 2\sqrt{x} d(\ln^2(x)) =$$

$$2\sqrt{x}\cdot\ln^2(x) - \int 2\sqrt{x}\cdot 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$2\sqrt{x}\cdot\ln^2(x) - \int\frac{4\ln(x)}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\cdot\ln^2(x) - \int 4\ln(x) d(2\sqrt{x})$$

$$= 2\sqrt{x}\cdot\ln^2(x) - \left(8\sqrt{x}\ln(x) - \int 2\sqrt{x}\cdot d4\ln(x)\right) =$$

$$2\sqrt{x}\cdot\ln^2(x) - 8\sqrt{x}\ln(x) + \int 2\sqrt{x}.\frac{4}{x}dx.$$

$$2\sqrt{x}\cdot\ln^2(x) - 8\sqrt{x}\ln(x) + \int\frac{8}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\cdot\ln^2(x) - 8\sqrt{x}\ln(x) + 16\sqrt{x}$$

Invullen van de grenzen $x = 1$ en $x = e$ geeft als oppervlakte

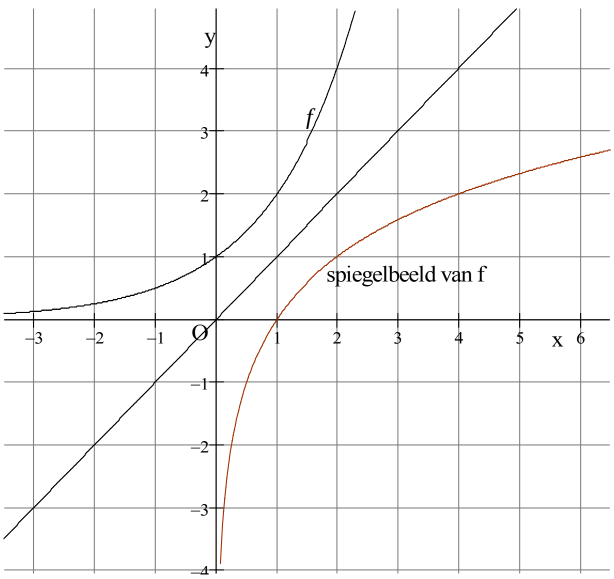
$$(2\sqrt{e} - 8\sqrt{e} + 16\sqrt{e}) - (0 - 0 + 16) = 10\sqrt{e} - 16$$

b. $I(V) = \pi\cdot\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^4(x)}{x}dx =$ Nu de substitutiemethode $\Rightarrow$ Stel $\ln(x) = t$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{x}dx = dt$
Invullen en de grenzen aanpassen geeft :

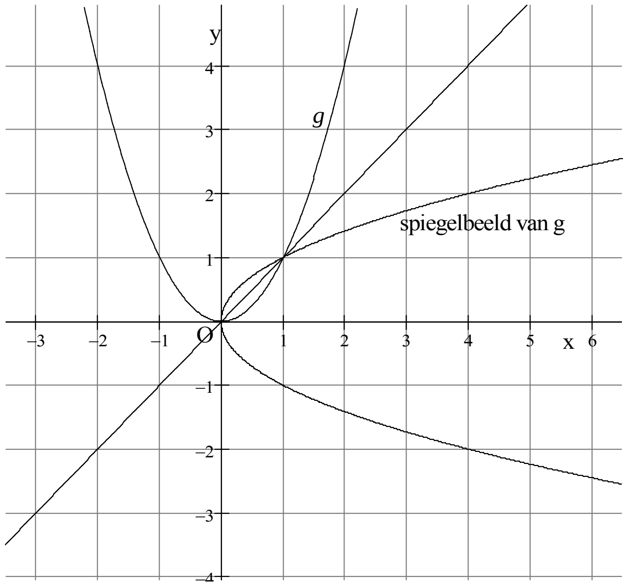
$$\pi\int_0^1 t^4 d(t) = \pi\left[\frac{1}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}\pi$$

27. $f(x) = 2^x$ en $g(x) = x^2$
a. Zie de figuur

b. Zie de figuur.

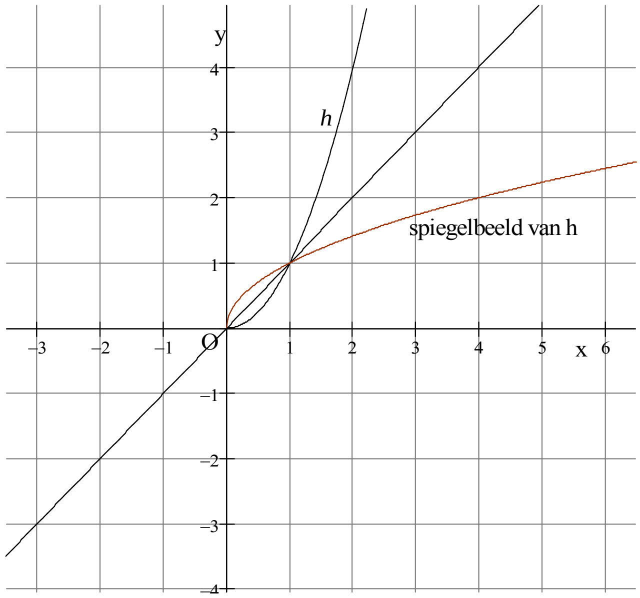


c. Zie de figuur.



d. Het spiegelbeeld van *g* is geen functie omdat er bij één *x* –waarde twee y-waarden zijn.

e. Als het domein van h(x) = x^2 gelijk is aan [0 , → > Dan is er bij iedere *x* maar één y-waarde en ook andersom.
Nu is het spiegelbeeld van de functie *h* wel een functie.



28. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

a. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ Nu $x = \tan(t) \Rightarrow dx = d(\tan(t) = \left(1+\tan^2(t)\right)dt \Rightarrow \dfrac{d(\tan t)}{1+\tan^2(t)} = dt$

b. Uit $x = \tan(t)$ volgt $t = \text{inv}(\tan(t)$ Dit klopt omdat nu de t in de x is uitgedrukt.

$\Rightarrow \int \frac{1}{\tan^2(t)+1}.d(\tan(t)) = \int dt$ Nu teruginvullen $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\int \frac{1}{x^2+1}.dx = t\\ t = inv(\tan(t))\end{array}\right\} \Rightarrow F(x) = inv(\tan(t)$$

29.

a. $\arctan\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{6}\pi$ want tan $(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ De uitkomst is niet $1\frac{1}{6}\pi$ omdat $1\frac{1}{6}\pi$ buiten het interval van $<-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi >$ ligt.

b. $\arctan(x) = \sqrt{3}$ $x = \tan(\sqrt{3})$ kan geen oplossing zijn omdat $\tan(\sqrt{3}) \approx -6{,}14$ en deze waarde ligt niet tussen $-\frac{1}{2}\pi$ en $+\frac{1}{2}\pi$.

30.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
arctan(x)	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$

31.

a. $\arctan(x) = \frac{1}{3}\pi \Leftrightarrow \tan(\frac{1}{3}\pi) = x \Rightarrow x = \sqrt{3}$

b. $\arctan(x-2) = -\frac{1}{4}\pi \Leftrightarrow \tan(-\frac{1}{4}\pi) = x - 2 \Rightarrow$
$x - 2 = -1 \Leftrightarrow x = 1$ voldoet.

c. $\arctan(x^2-1) = \frac{1}{4}\pi \Leftrightarrow \tan(\frac{1}{4}\pi) = x^2-1$ met $\Rightarrow$
$x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$

d. $\arctan(x) = \frac{2}{3}\pi$ kan niet want het bereik van $y = \arctan(x)$ ligt tussen $-0{,}5\pi$ en $0{,}5\pi$.

e. $\arctan(x) = \sqrt{2} \Rightarrow \tan(\sqrt{2}) = x \Rightarrow x \approx 6{,}334$

f. $\arctan(x^2 - 1) = 1 \Rightarrow \tan(1) = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 \approx 2{,}557.. \Rightarrow x \approx 1{,}600 \vee x \approx -1{,}600$

32.

a. $f(x) = 2\arctan(\frac{1}{2}x) \Rightarrow f'(x) = 2.\frac{1}{\left(\frac{1}{2}x\right)^2+1}.\frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{1}{4}x^2+1} = \frac{4}{x^2+4}$

b. $g(x) = \arctan(x-2) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{(x-2)^2+1} = \frac{1}{x^2-4x+5}$

c. $h(x) = \arctan\left(x^2\right) \Rightarrow h'(x) = \dfrac{1}{\left(x^2\right)^2+1}.2x = \dfrac{2x}{x^4+1}$

33.

a. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}dx = \Big[\arctan(x)\Big]_{-\frac{1}{3}\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan\left(-\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{3}\pi - \left(-\frac{1}{6}\pi\right) = \tfrac{1}{2}\pi$

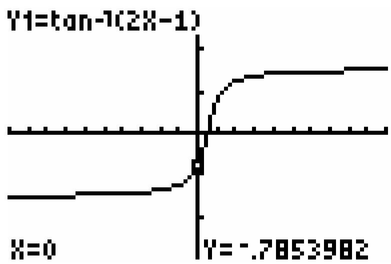
b. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+1)^2+1}dx = \Big[\arctan(x+1)\Big]_{-2}^{-1} = \arctan(0) - \arctan(-1) = \tfrac{1}{4}\pi$

c. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{3}\sqrt{3}} \frac{3}{(3x)^2+1}dx$ Apart: De primitieve heeft als hoofdvorm : y = arctan(3x)

Nu deze vorm gaan differentiëren $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{1}{(3x)^2+1}.3 = \dfrac{3}{(3x)^2+1}$ $\Rightarrow$ De primitieve is zelfs gelijk aan y = arctan(3x) We krijgen dus :

$$\int_{0}^{\frac{1}{3}\sqrt{3}} \frac{3}{(3x)^2+1}dx = \Big[\arctan(3x)\Big]_{0}^{\frac{1}{3}\sqrt{3}} = \arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan(0) = \tfrac{1}{3}\pi$$

34. $f(x) = \arctan(2x-1)$



a. H.A. y = -$\tfrac{1}{2}\pi$ en y = $\tfrac{1}{2}\pi$ Punt van symm. bij $x = \tfrac{1}{2}$

dus het punt $\left(\tfrac{1}{2},0\right)$

Zie de figuur.

b. Snijpunt met de x-as is $\left(\tfrac{1}{2},0\right)$

$f'(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2+1}.2 = \dfrac{2}{(2x-1)^2+1} \Rightarrow f'\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2 \Rightarrow$ De vergelijking is nu :

$y = 2x + b$ Door het punt $\left(\tfrac{1}{2},0\right)$ $\Rightarrow$ $0 = 1 + b$ $\Rightarrow$ $b = -1 \Rightarrow$

De vergelijking is nu : $y = 2x - 1$

c. $-\tfrac{1}{4}\pi < \arctan(2x-1) < \tfrac{1}{3}\pi$

Eerst de snijpunten met $y = \tfrac{1}{3}\pi$ en met $y = -\tfrac{1}{4}\pi$ $\Rightarrow$

$\arctan(2x-1) = \tfrac{1}{3}\pi \Rightarrow 2x - 1 = \tan(\tfrac{1}{3}\pi) \Leftrightarrow 2x = 1 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$

Tweede snijpunt :

arctan $(2x-1) = -\frac{1}{4}\pi \Leftrightarrow 2x-1 = \tan(-\frac{1}{4}\pi) \Leftrightarrow 2x = 1 - 1 \Leftrightarrow x = 0$

Aflezen uit de schets geeft : $0 < x < \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}$

d. Eerst $f(1) \Rightarrow f(1) = \arctan(2-1) = \arctan(1) = \frac{1}{4}\pi$

Nu aflezen vanuit de grafiek en rekening houdende met de asymptoot $y = -\frac{1}{2}\pi$.

Nu krijgen we : $-\frac{1}{2}\pi < f(x) \leq \frac{1}{4}\pi$

35.

a. $F(x) = \frac{1}{2}\arctan(2x) + c \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}.\frac{1}{(2x)^2+1}.2 = \frac{1}{4x^2+1} \Rightarrow$

$F(x)$ is een primitieve van $f(x) = \dfrac{1}{4x^2+1}$

b. $F(x) = 2\arctan(\frac{1}{2}x) + c \Rightarrow F'(x) = 2.\frac{1}{\left(\frac{1}{2}x\right)^2+1}.\frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{1}{4}x^2+1} = \frac{4}{x^2+4} \Rightarrow$

$F(x)$ is een primitieve van $f(x) = \dfrac{4}{4x^2+1}$

36.

a. $I = \int \frac{12}{16x^2+1}dx = \int \frac{12}{(4x)^2+1}dx$ Stel $4x = u \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4 \Rightarrow du = 4dx \Rightarrow$

$I = \int \frac{3}{u^2+1}du = 3\arctan(u) + c = 3\arctan(4x) + c$

Anders: Neem als hoofdvorm: $G(x) = \arctan(4x)$ Ga nu deze hoofdvorm differentiëren $\Rightarrow$

$G'(x) = \frac{1}{(4x)^2+1}.4 \Rightarrow F(x) = 3.G(x) + c = 3\arctan(4x) + c$

b. $I = \int \frac{4}{x^2+4}dx = \int \frac{1}{\frac{1}{4}x^2+1}dx = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{2}x\right)^2+1}dx = 2.\arctan(\frac{1}{2}x) + c$

c. $\int \arctan(2x)dx$ Partieel: Stel $f(x) = \arctan(2x)$ en $g'(x) = 1 \Rightarrow$

$f'(x) = \frac{1}{4x^2+1}.2 = \frac{2}{4x^2+1}$ en $g(x) = x \Rightarrow$

$\int \arctan(2x)dx = x.\arctan(2x) - \int \frac{2x}{4x^2+1}dx = x.\arctan(2x) - \frac{1}{4}\ln(4x^2+1) + C$

d. $\int \frac{3}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{3}{(x+2)^2+1}dx = 3\arctan(x+2) + c$

37.

a. $I=\int_0^1 \frac{3}{x^2+3}dx=$

Apart: $\frac{3}{x^2+3}=\frac{1}{\frac{x^2}{3}+1}=\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$

$$I=\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx=\left[\sqrt{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1=\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\sqrt{3}\arctan(0)=\sqrt{3}.\tfrac{1}{6}\pi=\frac{1}{6}\sqrt{3}.\pi$$

b. $I=\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}dx=\int_0^1 \frac{x}{\left(x^2\right)^2+1}dx$ Neem als hoofdvorm : G(x)= arctan(x^2) $\Rightarrow$

G ‘(x) = $\frac{1}{\left(x^2\right)^2+1}.2x$ dan F(x) = $\tfrac{1}{2}\arctan(x^2)\Rightarrow$

$$I=\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}dx=\int_0^1 \frac{x}{\left(x^2\right)^2+1}dx=\left[\tfrac{1}{2}\arctan\left(x^2\right)\right]_0^1=\tfrac{1}{8}\pi$$

c. $I=\int_3^6 \frac{5}{x^2-6x+18}dx=\int_3^6 \frac{5}{(x-3)^2+9}dx=\int_3^6 \frac{5/9}{\frac{(x-3)^2}{9}+1}dx=\int_3^6 \frac{5/9}{\left(\frac{x-3}{3}\right)^2+1}dx$

De hoofdvorm is nu : G(x) = $\arctan\left(\frac{x-3}{3}\right)\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{\left(\frac{x-3}{3}\right)^2+1}.\tfrac{1}{3}$ dan

F(x) = $\frac{5}{3}\arctan\left(\frac{x-3}{3}\right)$ $\Rightarrow$ $I=\left[\frac{5}{3}\arctan\left(\frac{x-3}{3}\right)\right]_3^6=\frac{5}{3}\arctan(1)-0=\frac{5}{3}.\frac{1}{4}\pi=\frac{5}{12}\pi$

d. $I=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\arctan(x)}{x^2+1}dx$ Neem als hoofdvorm : G(x) = $\left(\arctan(x)\right)^2$ $\Rightarrow$

G ‘(x) = 2.arctan(x) . $\frac{1}{x^2+1}$ Nu alleen de factor nog corrigeren $\Rightarrow$

$$I=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\arctan(x)}{x^2+1}dx=\left[\tfrac{1}{2}\left(\arctan(x)\right)^2\right]_0^{\sqrt{3}}=\tfrac{1}{2}\left(\arctan(\sqrt{3})\right)^2-0=\tfrac{1}{18}\pi^2.$$

38.

a. $I = \int_0^{1\frac{1}{2}} \frac{2}{4x^2+9}dx = \int_0^{1\frac{1}{2}} \frac{2/9}{\frac{4x^2}{9}+1}dx = \int_0^{1\frac{1}{2}} \frac{2/9}{\left(\frac{2x}{3}\right)^2+1}dx \Rightarrow$

De hoofdvorm is hier : G(x) = $\arctan\left(\frac{2x}{3}\right) \Rightarrow$ G'(x) = $\frac{1}{\left(\frac{2x}{3}\right)^2+1}.\frac{2}{3} \Rightarrow$

F(x) = $\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{2x}{3}\right) \Rightarrow I = \left[\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{2x}{3}\right)\right]_0^{1\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\arctan(1) - \frac{1}{3}.0 = \frac{1}{12}\pi$

b. $I = \int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{e^x}{\left(e^x\right)^2+1}dx \Rightarrow$ Stel e^x = u dan $\frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow e^x.dx = du$

Als x = 0 dan u = 1 en als x = $\frac{1}{2}\ln(3)$ dan u = $e^{\frac{1}{2}\ln(3)} = e^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} = \sqrt{3} \Rightarrow$

$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1}.du = \left[\arctan(u)\right]_1^{\sqrt{3}} = \arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan(1) = \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{12}\pi$

c. $I = \int_0^1 \frac{1}{2x^2-2x+1}.dx = \int_0^1 \frac{0,5}{x^2-x+0,5}.dx = \int_0^1 \frac{0,5}{(x-0,5)^2+\frac{1}{4}}.dx = \int_0^1 \frac{2}{4(x-0,5)^2+1}.dx =$

$\int_0^1 \frac{2}{\left(2(x-0,5)\right)^2+1}dx \Rightarrow$ Stel de hoofdvorm is G(x)= arctan(2(x-0,5)) $\Rightarrow$

G '(x) = $\frac{1}{\left(2(x-0,5)\right)^2+1}.2$ Toevallig is dit al de vorm die we zochten $\Rightarrow$ G(x) = F(x) $\Rightarrow$

$I = \left[\arctan\left(2(x-0,5)\right)\right]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{1}{4}\pi - \left(-\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\pi$

d. $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}.dx$ Partieel: Stel f(x) = ln(x^2 + 1) en g '(x) = $\frac{1}{x^2}$ Dan

f '(x) = $\frac{2x}{x^2+1}$ en g(x) = $-\frac{1}{x}$

Nu geldt dus :

$\int \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}.dx = \ln(x^2+1).\left(-\frac{1}{x}\right) - \int \frac{2x}{x^2+1}.\left(-\frac{1}{x}\right).dx = -\frac{\ln(x^2+1)}{x} + \int \frac{2}{x^2+1}dx \Rightarrow$

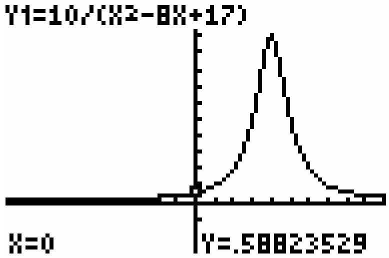
$I = \left[-\frac{\ln(x^2+1)}{x}\right]_1^{\sqrt{3}} + \left[2\arctan(x)\right]_1^{\sqrt{3}} = -\frac{\ln(4)}{\sqrt{3}} + \frac{\ln(2)}{1} + 2\arctan(\sqrt{3}) - 2\arctan(1) =$

$-\frac{\ln(4)}{\sqrt{3}} + \ln(2) + \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi = -\frac{\ln(4)}{\sqrt{3}} + \ln(2) + \frac{1}{6}\pi$

39. $f(x) = \dfrac{10}{x^2 - 8x + 17}$

a. Eerst op zoek naar de extreme waarde(n). $\Rightarrow$ $f'(x) = \dfrac{0-(2x-8).10}{(x^2-8x+17)^2} = \dfrac{80-20x}{(x^2-8x+17)^2} \Rightarrow$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 80 = 20x \Leftrightarrow x = 4$.
Nu de schets van de functie f :
We zien dus dat er een maximum is bij $x = 4$.
De y-waarde is dan : 10
Aangezien in de noemer de discriminant is -4 <0
geldt dus dat er geen sprake is van een V.A.
Het bereik is : <0 , 10]



b. We moeten bewijzen dat geldt voor alle p :
$f(4+p) = f(4-p)$
Er geldt : $f(x) = \dfrac{10}{x^2-8x+17} = \dfrac{10}{(x-4)^2+1} \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} f(4+p) &= \frac{10}{(4+p-4)^2+1} = \frac{10}{p^2+1} \\ f(4-p) &= \frac{10}{(4-p-4)^2+1} = \frac{10}{(-p)^2+1} = \frac{10}{p^2+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{f is symmetrisch t.o.v. de lijn } x = 4.$$

c. $O = \displaystyle\int_4^5 \frac{10}{(x-4)^2+1}\,dx = \Big[10\arctan(x-4)\Big]_4^5 = 10\arctan(1) - 10\arctan(0) = 2{,}5\pi$

d. Uit het gegeven volgt : $\displaystyle\int_4^p f(x)dx = \Big[10.\arctan(x-4)\Big]_4^p = 10.\arctan(p-4) - 10.\arctan(0) = 10 \Rightarrow$

arctan(p - 4) = 1 $\Leftrightarrow p - 4 = \tan(1) \approx 1{,}557. \Leftrightarrow p \approx 5{,}557$

40.

a. Als x ligt in het interval $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ dan volgt uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ dat deze grafiek een stijgende functie is en dat er bij iedere x 1 y-waarde is . Ook bij iedere y-waarde is er 1 waarde van x.

b. Voor g(x) = cos(x) moeten we dan het domein kiezen van 0 to π . $\Rightarrow$ [0 , π].

41.

x	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
arcsin(x)	$-\frac{1}{2}\pi$	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
arccos(x)	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	0

42.

a. arcsin(x) = $\frac{1}{2}\pi$ ⇔ x = 1

b. arccos(x) = $\frac{1}{2}\pi$ ⇔ x = 0

c. arcsin(x) = $-\frac{1}{6}\pi$ ⇔ $x = -\frac{1}{2}$

d. arccos(x) = $-\frac{1}{6}\pi$ ⇒ Geen x te vinden want het bereik van arccos(x) = [0 , π].

e. arcsin((x) = 2 kan ook niet omdat 2 niet in het bereik [-0,5π ; 0,5π] ligt.

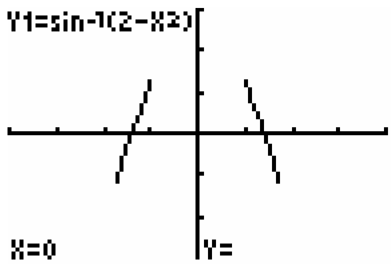
f. arccos(x) = 2 ⇔ cos(2) = x en 2 ligt inderdaad tussen 0 en π . ⇒ $x \approx -0{,}416$

g. 3.arcsin(x - √3) = π ⇔ arcsin(x - √3) = $\frac{1}{3}\pi$ ⇔ x - √3 = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ⇔ $x = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$

h. 3.arccos(x - √3) = π ⇔ arccos(x - √3) = $\frac{1}{3}\pi$ ⇔ x - √3 = $\frac{1}{2}$ ⇔ x = √3 + $\frac{1}{2}$

43. Gegeven : $f(x)$ = arcsin(2 -x^2)

a. Nu moet gelden : -1 ≤ 2 - x^2 ≤ 1 ⇔ -3 ≤ -x^2 ≤ -1 ⇔ 1 ≤ x^2 ≤ 3 ⇒
-√ 3 ≤ x ≤ -1 ∨ -1 ≤ x ≤ √ 3



b. Eerst de grafiek schetsen . ⇒
Het minimum is bij x = -√ 3 of x = √ 3
Het maximum bij x = -1 of bij x = 1
Nu geldt : f(-√ 3) = f(√ 3) = arcsin(-1) = $-\frac{1}{2}\pi$
en f(-1) = f(1) = $\frac{1}{2}\pi$ ⇒

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + [ar\,c\cos(x)]' = 0 \Leftrightarrow [\arccos(x)]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$B_f = [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\,]$

c. De schets staat al bij onderdeel b.

d. Snijpunt x=as met f ⇒ arcsin(2 - x^2) = 0 ⇔ sin(0) = 2 - x^2 en x ≥ 0 . ⇒ x = √ 2
⇒ Punt A is (√ 2 , 0) >
r.c. = $f'(x)$ ⇒ $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2-x^2)^2}}.(-2x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-(2-x^2)^2}}$ Nu x = √ 2 invullen ⇒

r.c. = f '(√ 2) = $\frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{1-0}} = -2\sqrt{2}$ ⇒ Stel nu de vergelijking is : y = -2√2 .x + b
Nu het punt A invullen ⇒ 0 = -2√ 2 . √ 2 + b ⇔ b = 4 ⇒
De vergelijking is dus : y = -2√ 2. x + 4

e. $\arcsin(2-x^2) < \frac{1}{6}\pi$ Eerst de snijpunten $\Rightarrow$

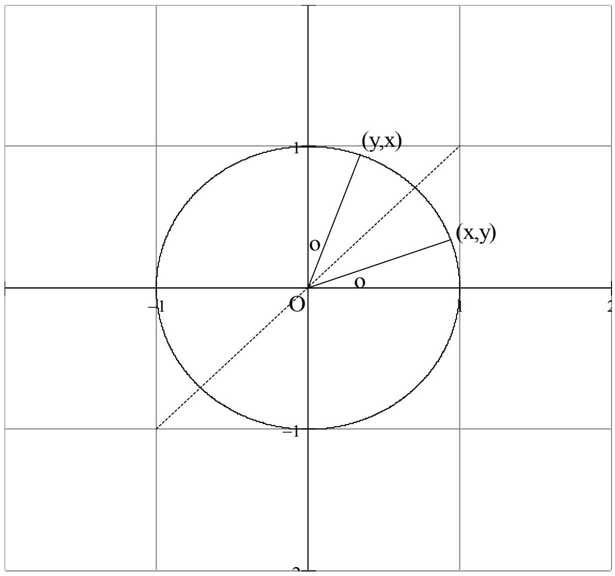
$\arcsin(2-x^2) = \frac{1}{6}\pi \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 2-x^2 \Leftrightarrow 2-x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = 1{,}5 \Leftrightarrow x = -\sqrt{1{,}5} \vee x = \sqrt{1{,}5}$

Nu aflezen uit de schets en rekening met het domein houden $\Rightarrow$

$-\sqrt{3} \le x < -\sqrt{1{,}5} \vee \sqrt{1{,}5} < x \le \sqrt{3}$

44.

a. We gaan uit van willekeurige coördinaten (x , y) bij een gegeven hoek α.
Zoals bekend krijgen we de coördinaten die bij de hoek $\frac{1}{2}\pi$ - α horen door te spiegelen in de lijn $y = x$.. De coördinaten van het beeld zijn dan (y ,x).
Er geldt dan dus:
sin($\frac{1}{2}\pi$ - α) = cos(α)



b. Stel cos(α) = x dan geldt arcos(x) = α
We weten ook dat geldt:
sin($\frac{1}{2}\pi$ - α) = $x \Rightarrow$ arcsin(x) = $\frac{1}{2}\pi$ - α
Samen volgt hier uit :
arccos(x) + arcsin(x) = $\frac{1}{2}\pi$

c. arccos(x) + arcsin(x) = $\frac{1}{2}\pi$ Nu links en rechts differentiëren $\Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + [\arccos(x)]' = 0 \Rightarrow [\arccos(x)]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

45.

a.

$$\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{6}\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}dx = \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{6}\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}dx = \left[\tfrac{1}{3}\arcsin(3x)\right]_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{6}\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}\arcsin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}) - \tfrac{1}{3}\arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{9}\pi - \frac{1}{18}\pi = \frac{1}{18}\pi$$

b. $$\int_{-1\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{1\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int_{-1\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{1\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{1}{3.\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}dx = \frac{1}{3}.\int_{-1\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{1\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}dx = \left[\tfrac{1}{3}.3.\arcsin\left(\tfrac{1}{3}x\right)\right]_{-1\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{1\frac{1}{2}\sqrt{2}} =$$

$$\left[\arcsin\left(\tfrac{1}{3}x\right)\right]_{-1\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{1\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \arcsin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) - \arcsin\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{2}\pi$$

c. $I = \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

Apart: Neem als hoofdvorm : G(x) = $\arcsin\left(x^2\right) \Rightarrow$ G'(x) = $\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}} .2x = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \Rightarrow$

Neem $F(x) = \frac{1}{2}\arcsin\left(x^2\right) \Rightarrow$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \left[\tfrac{1}{2}\arcsin\left(x^2\right)\right]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\arcsin(0) = \tfrac{1}{12}\pi$$

d. $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx =$

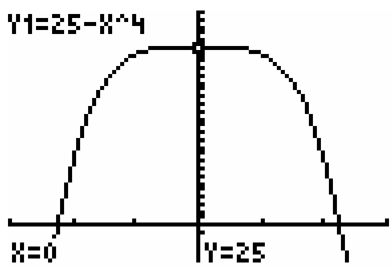
Apart: $\frac{x}{\sqrt{4-x^4}} = \frac{x}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}} \Rightarrow$ Neem als hoofdvorm: G(x) = $\arcsin\left(\frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow$

G'(x) = $\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}} . \frac{2x}{2} = \frac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}} \Rightarrow$ F(x)=0,5G(x) $\Rightarrow$

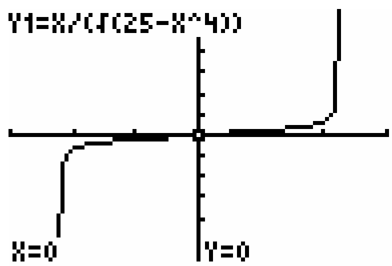
$$I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx = \left[0,5\arcsin\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^1 = 0,5\arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right) - \arcsin(0) = \tfrac{1}{12}\pi$$

46. Gegeven: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{25-x^4}}$

a. Voor het domein geldt: $25 - x^4 \geq 0$
Snijpunten: $x^4 = 25 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5}$
Nu de schets van $y = 25 - x^4 \Rightarrow$
Aflezen geeft : $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \Rightarrow$
$D_f = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$



Nu de schets van de grafiek van
$f(x) = \frac{x}{\sqrt{25-x^4}} \Rightarrow$
Er zullen verticale asymptoten zijn bij x = 5 en bij x = -5.



b. $f'(x)=\dfrac{1.\sqrt{25-x^4}-x.\dfrac{1}{2\sqrt{25-x^4}}.\left(-4x^3\right)}{25-x^4} \Rightarrow$

$$f'(\sqrt{3})=\frac{1.\sqrt{25-9}-\sqrt{3}.\dfrac{1}{2\sqrt{25-9}}.\left(-4.3.\sqrt{3}\right)}{25-9}=\frac{4+\dfrac{36}{8}}{16}=\frac{8,5}{16}=\frac{17}{32}$$

Stel nu de vergelijking van de raaklijn is : $y = \dfrac{17}{32}x + b$. Het raakpunt is √3 , $\left(\tfrac{1}{4}\sqrt{3}\right) \Rightarrow$

$\tfrac{1}{4}\sqrt{3}=\dfrac{17}{32}.\sqrt{3}+b \Leftrightarrow b=-\dfrac{9}{32}\sqrt{3} \Rightarrow$

De gevraagde vergelijking is nu : $y=\dfrac{17}{32}\sqrt{3}.x-\dfrac{9}{32}\sqrt{3}$

c. Puntsymm. in de oorsprong. $\Rightarrow$ Te bew. $f(p)+f(-p)=0$ voor iedere p in het domein.

$\Rightarrow f(p)+f(-p)=\dfrac{p}{\sqrt{25-p^4}}+\dfrac{-p}{\sqrt{25-(-p)^4}}=\dfrac{p}{\sqrt{25-p^4}}+\dfrac{-p}{\sqrt{25-p^4}}=0 \Rightarrow$

f is puntsymmetrisch in O.

d. $O=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{10}}\frac{x}{\sqrt{25-x^4}}dx$

Apart: $\dfrac{x}{\sqrt{25-x^4}}=\dfrac{x}{5\sqrt{1-\left(\dfrac{x^2}{5}\right)^2}}$ Neem als hoofdvorm: G(x) = $\arcsin\left(\dfrac{x^2}{5}\right) \Rightarrow$

G'(x) = $\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x^2}{5}\right)^2}}.\dfrac{2x}{5}=\dfrac{2}{5}.\dfrac{x}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x^2}{5}\right)^2}} \Rightarrow$ F(x)=$\dfrac{1}{2}.G(x) \Rightarrow$

$$I=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{4-x^4}}dx=\left[\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2}{5}\right)\right]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{10}}=\frac{1}{2}\arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\arcsin(0)=\frac{1}{2}.\tfrac{1}{6}\pi=\frac{1}{12}\pi$$

47.

a. $I=\int\arcsin(x)dx=\int 1.\arcsin(x)$ Integreren met partiële integratie.

Neem $f(x)$ = arcsin(x) en g'(x) = 1 Dan f '(x) = $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en g(x) = x $\Rightarrow$

$I = x.\arcsin(x) - \displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Apart: De hoofdvorm van deze integraal is G(x) =

$\sqrt{1-x^2} \Rightarrow G'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.(-2x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2}G(x) \Rightarrow$

$I = x.\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x.\arcsin(x) + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C$

b. $I = \int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Aangezien de afgeleide van de arcsin in deze vorm staat , proberen we als hoofdvorm

$G(x) = (\arcsin(x))^2 \Rightarrow G'(x) = 2.\arcsin(x).\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}.G(x)$

$I = \int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}.(\arcsin(x))^2 + C$

48. Gegeven: $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ en $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ en $h(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$

a. F(x) = arctan(x) + C G(x) = $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + D$

b. Som van de tellers en de noemers zijn gelijk.

c. H(x) = arctan(x) + $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + E$

49. $f(x) = \frac{2x+5}{x+1}$

a. Het klopt omdat dit de omgekeerde bewerking is van het optellen van breuken.

De primitieve $y = \frac{2x}{x+1}$ is min of meer net zo lastig als de primitieve *f*(x).

b. $2 + \frac{3}{x+1} = 2.\frac{x+1}{x+1} + \frac{3}{x+1} = \frac{2x+2}{x+1} + \frac{3}{x+1} = \frac{2x+5}{x+1} = f(x)$

De primitieven van *f*(x) is dus gelijk aan de primitieve van y = 2 + $\frac{3}{x+1}$ $\Rightarrow$

F(x) = $2x + 3.\ln|x+1| + C$

50.

a. $\int \frac{2x+1}{x+1}dx = \int \frac{2(x+1)-1}{x+1}dx = \int \left(2 - \frac{1}{x+1}\right)dx = 2x - \ln|x+1| + C$

b. $\int \frac{x}{x+1}dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = x - \ln|x+1| + C$

c. $\int \frac{x+1}{2x+1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{2x+1}dx = \int \tfrac{1}{2}dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{2x+1}dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\ln|2x+1| + C$

d. $\int \frac{2-x}{x+1}dx = \int \frac{-(x+1)+3}{x+1}dx = \int -1 + \frac{3}{x+1}dx = -x + 3\ln|x+1| + C$

e. $\int \frac{3-4x}{2x+1}dx = \int \frac{-2(2x+1)+5}{2x+1}dx = \int\left(-2+\frac{5}{2x+1}\right)dx = -2x + 2\tfrac{1}{2}\ln|2x+1| + C$

f. $\int \frac{6x-1}{1-2x}dx = \int \frac{-3(1-2x)+2}{1-2x}dx = \int\left(-3+\frac{2}{1-2x}\right)dx = -3x - \ln|1-2x| + C$

51.

a. $\int_2^3 \frac{x^2-2x+3}{x-1}dx$ Apart:

$$\begin{array}{l} x-1 \,/\, x^2-2x+3 \,\backslash\, x-1 \\ \underline{x^2-x}\ - \\ \quad -x+3 \\ \quad \underline{-x+1}\ - \\ \qquad 2 \end{array}$$

$\Rightarrow \int_2^3 \frac{x^2-2x+3}{x-1}dx = \int_2^3\left(x-1+\frac{2}{x-1}\right)dx$

$= \left[\tfrac{1}{2}x^2 - x + 2\ln(x-1)\right]_2^3 = \left(4\tfrac{1}{2}-3+2\ln(2)\right) - \left(2-2+2\ln(1)\right) = 1\tfrac{1}{2} + 2\ln(2)$

b. $\int_1^2 \frac{x^2+7x}{2x+1}dx$ Apart:

$$\begin{array}{l} 2x+1 \,/\, x^2+7x \,\backslash\, \tfrac{1}{2}x+3\tfrac{1}{4} \\ \underline{x^2+\tfrac{1}{2}x}\ - \\ \quad 6\tfrac{1}{2}x \\ \quad \underline{6\tfrac{1}{2}x+3\tfrac{1}{4}}\ - \\ \qquad -3\tfrac{1}{4} \end{array}$$

$\int_1^2 \frac{x^2+7x}{2x+1}dx = \int\left(\tfrac{1}{2}x+3\tfrac{1}{4}-\frac{3\frac{1}{4}}{2x+1}\right)dx =$

$\left[\tfrac{1}{4}x^2+3\tfrac{1}{4}x-\tfrac{13}{8}.\ln(2x+1)\right]_1^2 = \left(1+6\tfrac{1}{2}-\tfrac{13}{8}.\ln(5)\right) - \left(3\tfrac{1}{2}-\tfrac{13}{8}.\ln(3)\right) = 4+\tfrac{13}{8}.\ln\left(\tfrac{3}{5}\right)$

c. $\int_{-4}^{-2} \frac{-2x^2-x}{x+1}dx$

$$\begin{array}{l} x+1 \,/\, -2x^2-x \,\backslash\, -2x+1 \\ \underline{-2x^2-2x}\ - \\ \quad x \\ \quad \underline{x+1}\ - \\ \qquad -1 \end{array}$$

$\int_{-4}^{-2} \frac{-2x^2-x}{x+1}dx = \int_{-4}^{-2}\left(-2x+1-\frac{1}{x+1}\right)dx =$

$\left[-x^2+x-\ln|x+1|\right]_{-4}^{-2} = \left(-4-2-\ln(1)\right) - \left(-16-4-\ln(3)\right) =$

14 + ln(3)

52. $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x+1}$

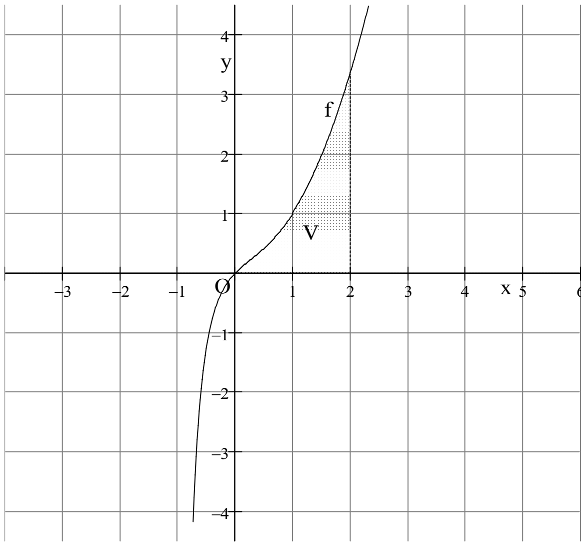
a. $f\,'(x)=\dfrac{\left(3x^2+1\right).(x+1)-1.(x^3+x)}{(x+1)^2}=\dfrac{3x^3+3x^2+x+1-x^3-x}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^3+3x^2+1}{(x+1)^2}\Rightarrow$

$f\,'(1)=1{,}5 \Rightarrow$ Stel de vergelijking van de raaklijn is : $y = 1{,}5x + b$.

Er geldt : $f(1) = 1 \Rightarrow$ raakpunt (1,1) Invullen $\Rightarrow$ $1 = 1{,}5 + b \Leftrightarrow b = -0{,}5 \Rightarrow$

De gevraagde vergelijking is : $y = 1{,}5x - 1{,}5$

b. Zie ook de figuur.



Opp.$=\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3+x}{x+1}dx$ Apart:

$x+1\,/\,x^3 \quad +x\,\backslash\, x^2-x+2$

$\underline{x^3+x^2}\,-$

$-x^2+x$

$-\underline{x^2-x}$

$2x$

$\underline{2x+2}$

-2

$\Rightarrow$

$$\int_0^2 \frac{x^3+x}{x+1}dx=\left(\int_0^2 x^2-x+2+\frac{-2}{x+1}\right)dx=\left[\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{2}x^2+2x-2\ln(x+1)\right]_0^2$$

$=$

$\left(\tfrac{1}{3}.8-2+4-2\ln(3)\right)-0=4\tfrac{2}{3}-2\ln(3)$

c. Nu geldt : $\displaystyle\int_0^p \frac{x^3+x}{x+1}dx=\left(\int_0^p x^2-x+2+\frac{-2}{x+1}\right)dx=\left[\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{2}x^2+2x-2\ln(x+1)\right]_0^p$

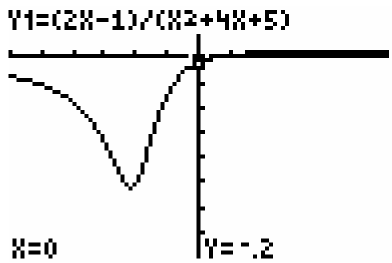
$\tfrac{1}{3}p^3-\tfrac{1}{2}p^2+2p-2\ln(p+1)-0=10$

voer in : $y_1 = \tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{2}x^2+2x-2\ln(x+1)$ en $y_2 = 10$

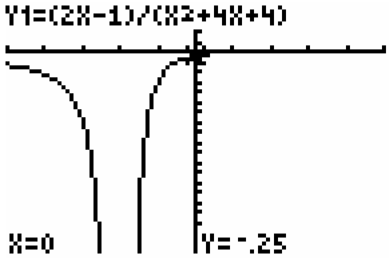
De solver geeft het snijpunt bij $x = p \approx 3{,}276$

53.

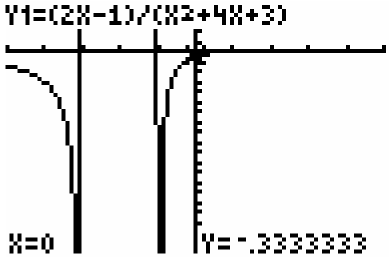
$f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+4x+5}$



$$g(x)=\frac{2x-1}{x^2+4x+4}$$



$$h(x)=\frac{2x-1}{x^2+4x+3}$$



Bij de functie *f* is de noemer nooit 0 omdat de discriminant van de noemer kleiner dan 0 is. Er is daarom geen V.A.

Bij de functie *g* is er een verticale asymptoot bij $x = -2$ omdat de noemer dan 0 is.

Bij de functie *h* is de noemer 0 als geldt: $x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow$
$x = -3 \ \vee \ x = -1 \ \Rightarrow$ Bij de functie *h* hebben we dan ook twee verticale asymptoten. Namelijk bij $x = -3$ en bij $x = -1$.

54.

a. $$\int\frac{x^2+x}{x^2+1}dx=\int\left(\frac{x^2+1}{x^2+1}+\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx=\int\left(1+\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$
$$x+\tfrac{1}{2}.\ln(x^2+1)-\arctan(x)+C$$

b. $$\int\frac{x^2-6x+8}{x^2-6x+9}dx=\int\frac{x^2-6x+9-1}{x^2-6x+9}dx=\int\left(1-\frac{1}{(x-3)^2}\right)dx=\int\left(1-(x-3)^{-2}\right)dx=$$
$$x+(x-3)^{-1}+C=x+\frac{1}{x-3}+C$$

c. $$\int\frac{x^3+x}{x^2+1}dx=\int\frac{x(x^2+1)}{x^2+1}dx=\int x dx=\tfrac{1}{2}x^2+C$$

d. $I=\int\frac{x^3+x}{x^2-6x+9}dx$ Nu de staartdeling:

$$x^2-6x+9\,/\,x^3 \qquad + \ x\,\backslash\, x+6$$
$$\underline{x^3-6x^2+9x}\ -$$
$$6x^2-8x$$
$$\underline{6x^2-36x+54}\ -$$
$$28x-54$$

$$\Rightarrow \quad I = \int \left(x + 6 + \frac{28x - 54}{x^2 - 6x + 9} \right) dx$$

Nu apart de rechtse breuk bekijken.$\Rightarrow$

$$\frac{28x-54}{x^2-6x+9} = \frac{14(2x-6)+30}{x^2-6x+9} = \frac{14(2x-6)}{x^2-6x+9} + 30.(x-3)^{-2} \quad \Rightarrow$$

$$I = \int \left(x + 6 + \frac{28x-54}{x^2-6x+9} \right) dx = \int \left(x + 6 + \frac{14(2x-6)}{x^2-6x+9} + 30(x-3)^{-2} \right) dx =$$

$$\tfrac{1}{2}x^2 + 6x + 14\ln\left|x^2-6x+9\right| - 30(x-3)^{-1} + C =$$

$$\tfrac{1}{2}x^2 + 6x + 14\ln\left|x^2-6x+9\right| - \frac{30}{x-3} + C$$

55.

a. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{x^2+4} dx$ Apart :

$$x^2 + 4 \,/\, x^3 \quad \backslash x$$
$$\underline{x^3 + 4x}\; -$$
$$-4x$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \frac{x^3}{x^2+4} dx = \int_0^2 \left(x - \frac{4x}{x^2+4} \right) dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - 2\ln\left(x^2+4\right) \right]_0^2 = 2 - 2\ln(8) + 2\ln(4) =$$

$$2 + 2\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2 - 2\ln(2)$$

b. $\displaystyle\int_0^8 \frac{x^3}{x^2+4x+4} dx$ Apart:

$$x^2 + 4x + 4 \,/\, x^3 + 0x^2 + 0x \,\backslash\, x - 4$$
$$\underline{x^3 + 4x^2 + 4x}\; -$$
$$-4x^2 - 4x$$
$$\underline{-4x^2 - 16x - 16}\; -$$
$$12x + 16$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{x^2+4x+4} = x - 4 + \frac{12x+16}{x^2+4x+4} = x - 4 + \frac{12(x+2)-8}{(x+2)^2} =$$

$$x - 4 + \frac{12}{x+2} - \frac{8}{(x+2)^2}. \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^8 \frac{x^3}{x^2+4x+4} dx = \int_0^8 \left(x - 4 + \frac{12}{x+2} - \frac{8}{(x+2)^2} \right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 4x + 12\ln|x+2| + \frac{8}{x+2} \right]_0^8$$

$$32 - 32 + 12\ln(10) + \frac{4}{5} - (12\ln(2) + 4) = -3\frac{1}{5} + 12\ln(5)$$

c. $\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^2+1}dx$

Apart $x^2+1 / x^4+0x^2+1 \backslash x^2-1$

$$\begin{array}{l} \underline{x^4+x^2}\,- \\ \quad -x^2+1 \\ \quad \underline{-x^2-1}\,- \\ \qquad 2 \end{array}$$

De breuksplitsing laat zien dat $\frac{x^4+1}{x^2+1}=x^2-1+\frac{2}{x^2+1} \Rightarrow$

$$\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^2+1}dx=\int_0^1\left(x^2-1+\frac{2}{x^2+1}\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x+2\arctan(x)\right]_0^1=\frac{1}{3}-1+2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\pi-\frac{2}{3}$$

d. $\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^2+2x+1}dx$

Apart: $x^2+2x+1 / x^4+0x^3+0x^2+0x+1 \backslash x^2-2x+3$

$$\begin{array}{l} \underline{x^4+2x^3+x^2}\,- \\ \quad -2x^3-x^2+0x \\ \quad \underline{-2x^3-4x^2-2x}\,- \\ \qquad 3x^2+2x+1 \\ \qquad \underline{3x^2+6x+3}\,- \\ \qquad\quad -4x-2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^4+1}{x^2+2x+1}=x^2-2x+3-\frac{4x+2}{(x+1)^2}=x^2-2x+3-\frac{4(x+1)-2}{(x+1)^2}=x^2-2x+3-\frac{4}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^4+1}{x^2+2x+1}dx=\int_0^1\left(x^2-2x+3-\frac{4}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+3x-4\ln|x+1|-\frac{2}{x+1}\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{1}{3}-1+3-4\ln(2)\right)-(-2)=4\tfrac{1}{3}-4\ln(2)$$

56 Gegeven : $f(x)=\frac{10x+5}{4x^2-4x+1}$

a. $f'(x)=\frac{(4x^2-4x+1)\cdot 10-(10x+5)\cdot(8x-4)}{(4x^2-4x+1)^2}=\frac{-40x^2-40x+30}{(2x-1)^4}$

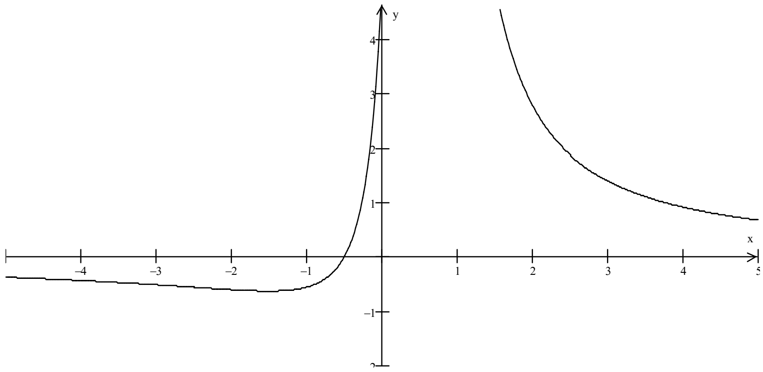
Snijpunt van de grafiek en de x-as $\Rightarrow$ $10x+5=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow$ Snijpunt is : $A(-\frac{1}{2},0)$ en

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{40}{16}=2\frac{1}{2}=rc_k$.

Hieruit volgt als vergelijking van de raaklijn $k: y=2\frac{1}{2}x+1\frac{1}{4}$

b. $f'(x)=0$ geeft de vergelijking $-40x^2-40x+30=0$ ofwel $4x^2+4x-3=0$.

Met behulp van de abc-formule levert dat de nulpunten $x=-1\frac{1}{2} \vee x=\frac{1}{2}$



De waarde $\frac{1}{2}$ vervalt, want voor deze waarde wordt de noemer gelijk aan nul.

Inspectie van de grafiek leert dat er bij $x=-1\frac{1}{2}$ sprake van een minimum is.

Uit $f(-1\frac{1}{2})=\frac{-10}{16}=-\frac{5}{8}$ volgt dat $B_f=[-\frac{5}{8},\rightarrow\rangle$.

c. Schrijf het functievoorschrift als volgt: $f(x)=\frac{5(2x-1)+10}{(2x-1)^2}=\frac{5}{2x-1}+\frac{10}{(2x-1)^2}$

De oppervlakte van het gebied is gelijk aan $\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3(\frac{5}{2x-1}+\frac{10}{(2x-1)^2})dx=$

$$\left[2\frac{1}{2}\ln|2x-1|-\frac{5}{2x-1}\right]_1^3=\left(2\frac{1}{2}\ln(5)-1\right)-(-5)=2\frac{1}{2}\ln(5)+4$$

57. Gegeven : $h(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+4x+3}$

a. $$\frac{-1\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{3\frac{1}{2}}{x+3}=\frac{-1\frac{1}{2}(x+3)}{(x+1)(x+3)}+\frac{3\frac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x+3)}=\frac{-1\frac{1}{2}(x+3)+3\frac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x+3)}=\frac{2x-1}{x^2+4x+3}=h(x)$$

b. $\int \frac{2x-1}{x^2+4x+3}\,dx = \int \left(\frac{-1\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{3\frac{1}{2}}{x+3} \right) dx = -1\tfrac{1}{2}\ln|x+1| + 3\tfrac{1}{2}\ln|x+3| + C$

58. $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-2)}{(x-2)(x-2)} = \frac{(A+B)x+(-2A-2B)}{(x-2)(x-2)}$

Gelijkstellen aan de breuk $\frac{x+1}{(x-2)(x-2)}$ leidt tot het stelsel $A+B=1 \;\wedge\; -2A-2B=1$.

Hier staat echter dat gelijktijdig $A+B=1$ en $A+B=-\frac{1}{2}$, wat onmogelijk is.

59

a) $\int \frac{x^2+2x-1}{x^2-5x+6}\,dx$

Omdat teller en noemer van gelijke graad zijn, begin je met een staartdeling.

$$\begin{array}{l} x^2-5x+6 / x^2+2x-1 \backslash 1 \\ \qquad\qquad\; \underline{x^2-5x+6}\,- \\ \qquad\qquad\quad 7x-7 \end{array}$$

Uit het resultaat van de deling is af te leidendat $f(x) = 1 + \frac{7x-7}{(x-2)(x-3)}$.

De resterende breuk splitsen we dan verder.

$$\frac{7x-7}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)}{(x-2)(x-3)} + \frac{B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x+(-3A-2B)}{(x-2)(x-3)} \equiv \frac{7x-7}{(x-2)(x-3)}$$

Dit leidt tot het stelsel : $A+B=7 \;\wedge\; -3A-2B=-7$. $\Rightarrow$

$$\begin{cases} A+B=7 \\ -3A-2B=-7 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A+3B=21 \\ -3A-2B=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=14 \\ A+14=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-7 \\ B=14 \end{cases}$$

We hebben nu gevonden dat $f(x) = 1 - \frac{7}{x-2} + \frac{14}{x-3} \Rightarrow$

$$\int \frac{x^2+2x-1}{x^2-5x+6}\,dx = \int \left(1 - \frac{7}{x-2} + \frac{14}{x-3}\right) dx = x - 7\ln|x-2| + 14\ln|x-3| + C$$

b. $\int \frac{x^3}{x^2+2x-3}\,dx$

De graad van de teller is hoger dan van de noemer. Start daarom met het maken van een staartdeling. Daar valt uit af te lezen dat

$$\begin{array}{l} x^2+2x-3 / x^3+0x^2+0x+0 \backslash x-2 \quad \Rightarrow g(x) = x-2+\frac{7x-6}{(x-1)(x+3)}. \\ \qquad\qquad \underline{x^3+2x^2-3x}\,- \\ \qquad\qquad\quad -2x^2+3x+0 \\ \qquad\qquad\quad \underline{-2x^2-4x+6}\,- \\ \qquad\qquad\qquad\; 7x-6 \end{array}$$

De resterende breuk splitsen we als volgt verder.

$$\frac{7x-6}{(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}=\frac{(A+B)x+3A-B}{(x-1)(x+2)}$$

Vergelijken met de breuk $\frac{7x-6}{(x-1)(x+2)}$ leert dat $A+B=7 \wedge 3A-B=-6$. $\Rightarrow$

$$\begin{cases}A+B=7\\3A-B=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4A=1\\A+B=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{4}\\B=6\frac{3}{4}\end{cases}$$

De oplossing van dit stelsel is $A=\frac{1}{4}$ en $B=6\frac{3}{4}$.

We concluderen dat $g(x)=x-2+\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{6\frac{3}{4}}{x-3}$ $\Rightarrow$

$$\int\frac{x^3}{x^2+2x-3}dx=\int\left(x-2+\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{6\frac{3}{4}}{x-3}\right)dx=\tfrac{1}{2}x^2-2x+\tfrac{1}{4}\ln|x-1|+6\tfrac{3}{4}\ln|x-3|+C$$

c. $\int\frac{2x^2+1}{2x^2-x}dx$

De teller en noemer zijn van dezelfde graad.

Schrijf daarom eerst $f(x)=\frac{2x^2-x+1+x}{2x^2-x}=1+\frac{x+1}{x(2x-1)}=1+\frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}$

Na gelijknamig maken van de laatste twee breuken wordt het:

$$1+\frac{A(2x-1)}{x(2x-1)}+\frac{Bx}{x(2x-1)}=\frac{(2A+B)x-A}{x(2x-1)}$$

We krijgen dan het stelsel $2A+B=1 \wedge -A=1$ waaruit volgt $A=-1$ en $B=3$.

Dit wil zeggen dat $h(x)=1-\frac{1}{x}+\frac{3}{2x+1}$ $\Rightarrow$

$$\int\frac{2x^2+1}{2x^2-x}dx=\int\left(1-\frac{1}{x}+\frac{3}{2x+1}\right)dx=x-\ln|x|+\tfrac{3}{2}\ln|2x+1|+C$$

d. $\int\frac{2x^3+1}{2x^2+x}dx$

De teller is van hogere graad dan de noemer, en daarom maken we eerst een deling.

$$2x^2+x/2x^3+0x^2+0x+1\backslash x-\frac{1}{2}$$
$$\underline{2x^3+x^2}\,-$$
$$-x^2+0x$$
$$\underline{-x^2-\frac{1}{2}x}\,-$$
$$\frac{1}{2}x+1$$

Uit het resultaat daarvan is af te lezen dat $j(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}x+1}{x(2x+1)}=x-\frac{1}{2}+\frac{A}{x}+\frac{B}{2x+1}$

Gelijknamig maken geeft $j(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{A(2x+1)+Bx}{x(2x+1)}=x-\frac{1}{2}+\frac{(2A+B)x+A}{x(2x+1)}$

We krijgen als stelsel $2A+B=\frac{1}{2} \;\wedge\; A=1 \;\Rightarrow\; A=1 \;\wedge\; B=-1\frac{1}{2}$

Uit $j(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{x}-\frac{1\frac{1}{2}}{2x+1}$ volgt dan

$$\int\frac{2x^3+1}{2x^2+x}dx=\int\left(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{x}-\frac{1\frac{1}{2}}{2x+1}\right)dx=\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{3}{4}\ln\left|2x+1\right|+C$$

60

a. $\int_3^4\frac{x}{x^2-x-2}dx$ Schrijf

$$\frac{x}{x^2-x-2}=\frac{x}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{(A+B)x+A-2B}{(x-2)(x+1)}$$

Vergelijken van beide schrijfwijzen laat zien dat $A+B=1 \;\wedge\; A-2B=0$ waaruit volgt

$$\begin{cases}A+B=1\\A-2B=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3B=1\\A=2B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=\frac{1}{3}\\A=2B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{2}{3}\\B=\frac{1}{3}\end{cases}$$

De integrand is dus te schrijven als $\frac{x}{x^2-x-2}=\frac{\frac{2}{3}}{x-2}+\frac{\frac{1}{3}}{x+1}\;\Rightarrow$

$$\int_3^4\frac{x}{x^2-x-2}dx=\int_3^4\left(\frac{\frac{2}{3}}{x-2}+\frac{\frac{1}{3}}{x+1}\right)dx=\left[\tfrac{2}{3}\ln(x-2)+\tfrac{1}{3}\ln(x+1)\right]_3^4$$

$$=\frac{2}{3}\ln(2)+\frac{1}{3}\ln(5)-\frac{1}{3}\ln(4)=\frac{1}{3}\ln(4)+\frac{1}{3}\ln(5)-\frac{1}{3}\ln(4)=\frac{1}{3}\ln(5)$$

b. $\displaystyle\int_0^2 \frac{4x-8}{x^2-4x-5}\,dx$

Ga uit van $\dfrac{4x-8}{(x-5)(x+1)} = \dfrac{A}{x-5} + \dfrac{B}{x+1} = \dfrac{A(x+1)+B(x-5)}{(x-5)(x+1)} = \dfrac{(A+B)x+A-5B}{(x-5)(x+1)}$.

Hieruit volgt het stelsel $A+B=4 \wedge A-5B=-8$

$$\begin{cases} A+B=4 \\ A-5B=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6B=12 \\ A+B=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=2 \\ A=2 \end{cases}$$

De integrand is dus te schrijven als $\dfrac{4x-8}{x^2-5x+6} = \dfrac{2}{x-5} + \dfrac{2}{x+1} \Rightarrow$

$$\int_0^2 \frac{4x-8}{x^2-4x-5}\,dx = \int_0^2 \left(\frac{2}{x-5} + \frac{2}{x+1}\right)dx = \left[2\ln|x-5| + 2\ln|x+1|\right]_0^2 = 2\ln(3) + 2\ln(3) - 2\ln(5)$$

$$= 2\ln\left(\frac{9}{5}\right)$$

c. $\displaystyle\int_0^2 \frac{-2}{x^2-2x-3}\,dx$

Uit $\dfrac{-2}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x+1} = \dfrac{A(x+1)+B(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{(A+B)x+A-3B}{(x-3)(x+1)}$ volgt het stelsel

$A+B=0 \wedge A-3B=-2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-3B=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4B=2 \\ A=-B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=\frac{1}{2} \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

De integrand is dus te schrijven als : $\dfrac{-2}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{x-3} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x+1} \Rightarrow$

$$\int_0^2 \frac{-2}{x^2-2x-3}\,dx = \int_0^2 \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x-3} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx = \left[\tfrac{1}{2}\ln(x+1) - \tfrac{1}{2}\ln(x-3)\right]_0^2 =$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\ln(3) - 0\right) - \left(0 - \tfrac{1}{2}\ln(3)\right) = \ln(3)$$

d. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^4}{x^2+4x+3}\,dx$

Omdat de graad van de noemer kleiner is dan de graad van de teller, maken we eerst een staartdeling. $\Rightarrow$

$$\begin{array}{l}
x^2+4x+3 / x^4+0x^3+0x^2+0x+0 \backslash x^2-4x+13 \\
\qquad\qquad \underline{x^4+4x^3+3x^2}\ - \\
\qquad\qquad\quad -4x^3-3x^2+0x \\
\qquad\qquad\quad \underline{-4x^3-16x^2-12x}\ - \\
\qquad\qquad\qquad\quad 13x^2+12x+0 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{13x^2+52x+39}\ - \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -40x-39
\end{array}$$

Uit het resultaat blijkt dat de integrand gelijk is aan

$$\frac{x^4}{x^2+4x+3}=x^2-4x+13-\frac{40x+39}{(x+1)(x+3)}$$

De laatste breuk splitsen we in $\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}$. Gelijknamig maken geeft :

$$\frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)}=\frac{(A+B)x+3A+B}{(x+1)(x+3)}=\frac{40x+39}{(x+1)(x+3)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=40 \\ 3A+B=39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2A=1 \\ A+B=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=40\frac{1}{2} \end{cases}$$

De integrand is daarom te schrijven als : $\frac{x^4}{x^2+4x+3}=x^2-4x+13-\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{40\frac{1}{2}}{x+3}\right)$

$$\Rightarrow \int_0^2 \frac{x^4}{x^2+4x+3}dx=\int_0^2\left(x^2-4x+13+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}-\frac{40\frac{1}{2}}{x+3}\right)dx=$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+13x+\frac{1}{2}\ln(x+1)-40\frac{1}{2}\ln(x+3)\right]_0^2$$

$$\left(\frac{8}{3}-8+26+\frac{1}{2}\ln(3)-40\frac{1}{2}\ln(5)\right)+40\frac{1}{2}\ln(3)=20\frac{2}{3}-40\frac{1}{2}\ln(5)+41\ln(3)$$

61. Gegeven $f(x)=\frac{2x-5}{x^2-5x+6}$

Met breuksplitsing: $\frac{2x-5}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{(A+B)x-3A-2B}{(x-2)(x-3)}$ leidt dit tot het stelsel

$A+B=2 \ \wedge \ 3A+2B=5 .\Rightarrow$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 3A+2B=5 \end{cases}\left|\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \begin{cases} 3A+3B=6 \\ 3A+2B=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=1 \\ 3A+3=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(x)=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}.$$

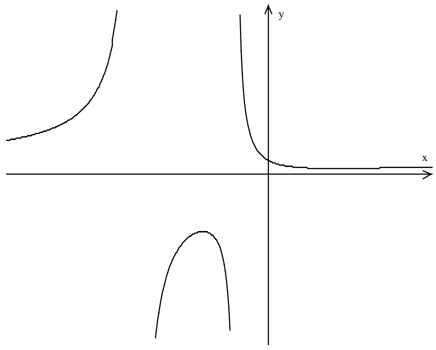
$$\Rightarrow \int\frac{2x-5}{x^2-5x+6}dx=\int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)dx=\ln|x-2|+\ln|x-3|+C=\ln\left|x^2-5x+6\right|+C$$

Met substitutie: stel $x^2-5x+6=t$ waaruit volgt $(2x-5)dx=dt$. $\Rightarrow$

$$\int\frac{2x-5}{x^2-5x+6}dx=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C=\ln|x^2-5x+6|+C$$

De resultaten zijn duidelijk gelijk, maar de substitutiemethode is iets sneller gebleken.

62 Gegeven: $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2+5x+4}$



a. $f'(x)=\dfrac{(x^2+5x+4)\cdot 2x-(x^2+4)\cdot(2x+5)}{(x^2+5x+4)^2}=\dfrac{5x^2-20}{(x^2+5x+4)^2}$

heeft $x=-2$ en $x=2$ als nulpunten.

De grafiek leert dat max. $=f(-2)=-4$ en min. $=f(2)=\dfrac{4}{9}$.

b. $A=(-6,f(-6))=(-6,4)$ en

$rc_k=f'(-6)=1\dfrac{3}{5}$

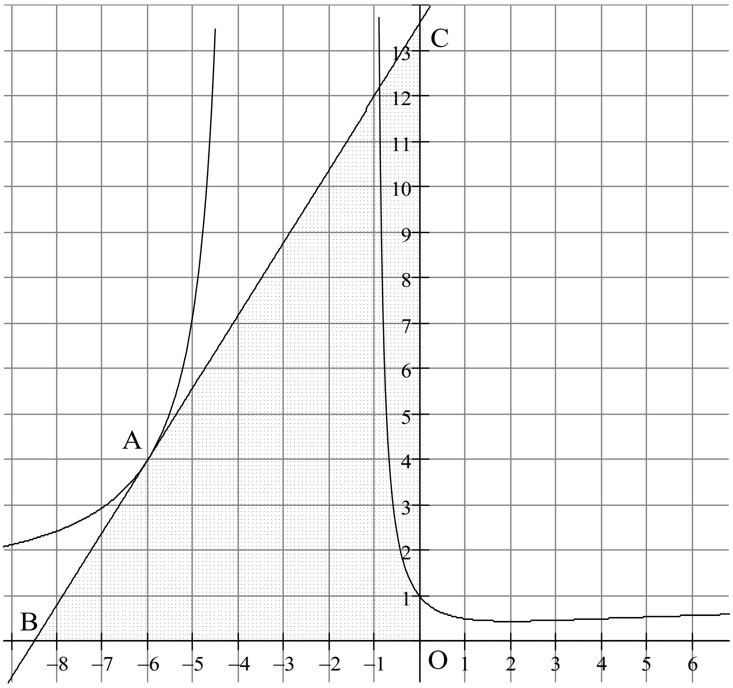
waaruit volgt $k: y=1\dfrac{3}{5}x+13\dfrac{3}{5}$

Deze lijn snijdt de *x*-as in $B(-8\dfrac{1}{2},0)$ en

de *y*-as in $C(0,13\dfrac{3}{5})$.

Hieruit volgt

$Opp_{\Delta OBC}=\dfrac{1}{2}\cdot 8\dfrac{1}{2}\cdot 13\dfrac{3}{5}=57\dfrac{4}{5}$



c. Zie de figuur. De oppervlakte van V is : $\displaystyle\int_0^6 \frac{x^2+4}{x^2+5x+4}dx$

We bepalen eerst de onbepaalde integraal van de functie.

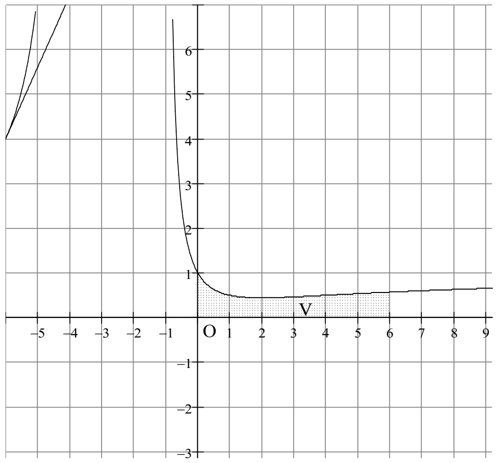
Schrijf daartoe $f(x)=\dfrac{(x^2+5x+4)-5x}{x^2+5x+4}=1-\dfrac{5x}{(x+1)(x+4)}$

Uit $\dfrac{5x}{(x+1)(x+4)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+4}=\dfrac{(A+B)x+4A+B}{(x+1)(x+4)}$

volgt het stelsel $A+B=5 \wedge 4A+B=0 \Rightarrow$

$$\begin{cases}A+B=5\\4A+B=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3A=5\\A+B=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{5}{3}\\B=6\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

$\Rightarrow f(x)=1+\dfrac{\frac{5}{3}}{x+1}-\dfrac{6\frac{2}{3}}{x+4}$ en dus

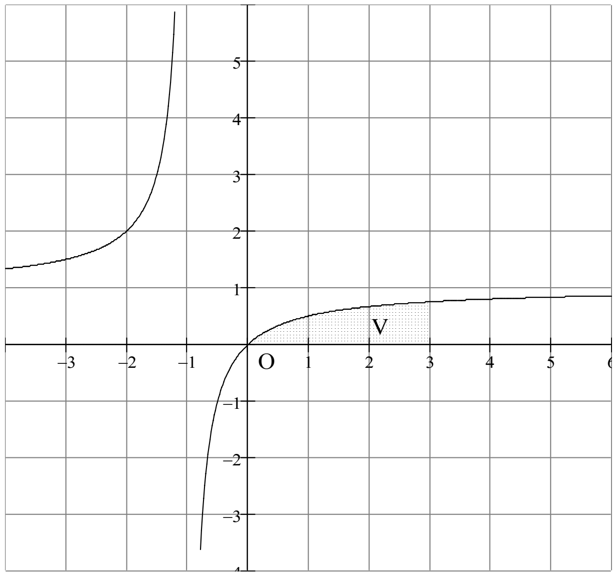


$$\int\left(1+\frac{\frac{5}{3}}{x+1}-\frac{6\frac{2}{3}}{x+4}\right)dx = x+\frac{5}{3}\ln|x+1|-6\frac{2}{3}\ln|x+4|$$

De gevraagde oppervlakte is dan:

$$\int_0^6 f(x)dx=\left[x+\frac{5}{3}\ln|x+1|-6\frac{2}{3}\ln|x+4|\right]_0^6=\left(6+\frac{5}{3}\ln(7)-6\frac{2}{3}\ln(10)\right)-\left(0-6\frac{2}{3}\ln(4)\right)=6+\frac{5}{3}\ln(7)+6\frac{2}{3}\ln(\frac{2}{5})$$

63 Gegeven: $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$



a. $$Opp.(V)=\int_0^3\frac{x}{x+1}dx=\int_0^3\frac{(x+1)-1}{x+1}dx=$$

$$\int_0^3(1-\frac{1}{x+1})dx=x-\ln|x+1|\Big]_0^3=3-\ln(4)$$

b $$\pi\cdot\int_0^3\frac{x^2}{x^2+2x+1}dx=\pi\int_0^3\frac{(x^2+2x+1)-(2x+1)}{x^2+2x+1}=$$

$$\pi\cdot\int_0^3(1-\frac{2x+1}{x^2+2x+1})dx=\pi\cdot\int_0^3(1-\frac{2x+2-1}{x^2+2x+1})dx=$$

$$\pi\cdot\int_0^3(1-\frac{2x+2}{x^2+2x+1}+\frac{1}{(x+1)^2})dx=\pi\cdot\left[x-\ln|x^2+2x+1|-\frac{1}{x+1}\right]_0^3=$$

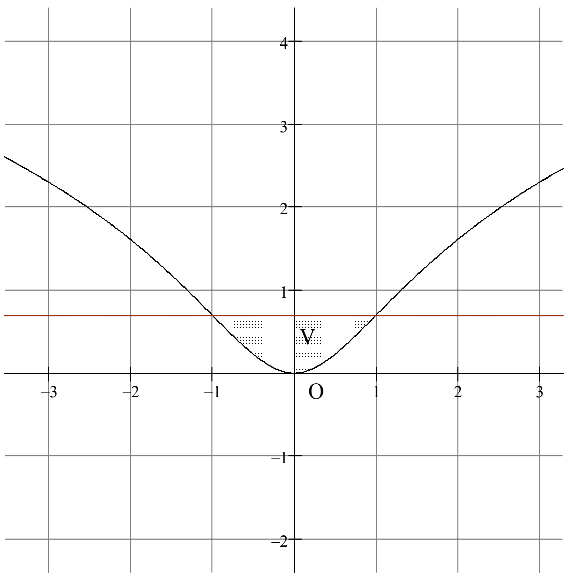
$$\pi\cdot(3-\ln(16)-\frac{1}{4}+1)=\pi\cdot\left(3\frac{3}{4}-4\ln(2)\right)$$

64 Gegeven : $f(x)=\ln(x^2+1)$

a. $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{3}{5}$ leidt tot de vergelijking $3x^2-10x+3=0$ met oplossingen

$x=3 \vee x=\dfrac{1}{3} \Rightarrow$ De raakpunten zijn dus

$(3,f(3))=(3,\ln(10))$ en $\left(\dfrac{1}{3},f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)=\left(\dfrac{1}{3},\ln\left(1\dfrac{1}{9}\right)\right)$



b. De grafiek van de functie en de lijn met vergelijking $y=\ln(2)$ snijden elkaar in de punten $(-1,\ln(2))$ en $(1,\ln(2))$.
Op grond van de symmetrie t.o.v. de *y*-as is de gevraagde oppervlakte gelijk aan :

$$2\cdot\int_0^1(\ln(2)-\ln(x^2+1))dx=2\cdot\int_0^1\ln(2)dx-2\cdot\int_0^1\ln(x^2+1)dx$$

$$=2.\left[x\ln(2)\right]_0^1-2\cdot\int_0^1\ln(x^2+1)dx=2\ln(2)-2\cdot\int_0^1\ln(x^2+1)dx\ .$$

Om de laatste integraal te berekenen, wordt eerst partieel geïntegreerd. We krijgen:

$$opp(V)=2\ln(2)-2\cdot\left\{\left[x\cdot\ln(x^2+1)\right]_0^1-\int_0^1 xd(\ln(x^2+1)\right\}=2\ln(2)-2\cdot\left\{\ln(2)_0^1-\int_0^1\frac{2x^2}{x^2+1}dx\right\}=$$

$$2\cdot\int_0^1\frac{2x^2+2-2}{x^2+1}dx=2\cdot\int_0^1(2-\frac{2}{x^2+1})dx=$$

$$\left[4x-4\arctan(x)\right]_0^1=4-4\cdot\frac{1}{4}\pi=4-\pi$$